

## 13 Механические колебания

### 13.1 Уравнение гармонических колебаний

**13.1.1** Определить наименьшую разность фаз колебаний маятников, изображенных на рисунке 1. Смещение каждого маятника равно амплитуде. Сохранится ли разность смещения фаз в случае рисунка а? в случае рисунка б?

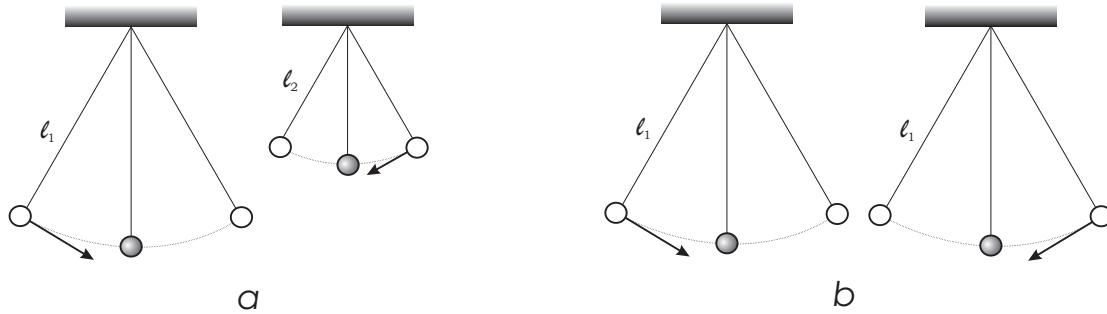


Рис. 1:

**13.1.2** Подвешенный на нити грузик совершает гармонические колебания. В таблице представлены координаты грузика через одинаковые промежутки времени. Какова максимальная скорость грузика?

t(с)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
x (см)	6	3	0	-3	-6	-3	0	3

**13.1.3** Подвешенный на нити грузик совершает гармонические колебания. В таблице представлены координаты грузика через одинаковые промежутки времени. Найти период, циклическую частоту, амплитуду и максимальную скорость грузика? Запишите уравнение колебаний  $x(t)$ .

t(с)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
x (см)	6	3	0	3	6	3	0	3

**13.1.4** Записать уравнения гармонических колебаний при следующих параметрах: 1)  $A = 10.0$  см,  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\omega = 2\pi$ ; 2)  $A = 5.0$  см,  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $T = 2$  с; 3)  $A = 4.0$  см,  $\varphi_0 = \pi$ ,  $\nu = 2.0$  Гц.

**13.1.5** Записать уравнение гармонических колебаний при следующих параметрах:  $A = 5.0 \cdot 10^{-2}$  м,  $T = 0.01$  с,  $\varphi_0 = 0$ . Определить частоту колебаний; циклическую частоту; амплитуды скорости и ускорения; полную энергию гармонических колебаний для тела массой  $m = 0.10$  кг.

**13.1.6** Гармонические колебания материальной точки описываются уравнением  $x = 2 \sin[\pi(t/4 + 1/2)]$ , где смещение выражено в сантиметрах, а время - в секундах. Определить амплитуду, начальную фазу и период колебаний.

**13.1.7** Материальная точка совершает гармонические колебания с начальной фазой, равной нулю, проходит первую половину амплитуды за 0.05 с. Записать уравнение гармонических колебаний, если амплитуда равна  $2 \cdot 10^{-2}$  м. За какое время она пройдет четверть амплитуды из положения равновесия?

**13.1.8** Сколько времени в течение одного периода материальная точка, совершающая гармонические колебания, находится в интервале со смещением от  $+A/2$  до  $-A/2$ ?

**13.1.9** По графику гармонических колебаний (Рис. 2) записать уравнение движения материальной точки и определить её максимальную скорость.

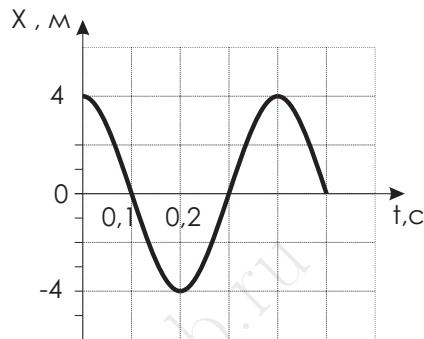


Рис. 2:

**13.1.10** Используя параметры гармонических колебаний, показанных на рисунке к предыдущей задаче, записать уравнения зависимости скорости и ускорения от времени. Определить мгновенные значения скорости и ускорения для момента времени 0,35 с.

**13.1.11** Тело массой 50 г совершает гармонические колебания, описываемые уравнением  $x = 2.0 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(20\pi t + \pi/2)$ . Определить максимальное смещение; начальную фазу; частоту колебаний; максимальную возвращающую силу.

**13.1.12** Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой 10 Гц, в положении равновесия имеет скорость 6,28 м/с. Определить максимальные значения смещения и ускорения; записать уравнение гармонических колебаний с начальной фазой, равной нулю.

**13.1.13** Скорость тела при гармонических колебаниях определяется уравнением  $v = 0.060 \sin(100t)$ . Записать уравнение зависимости смещения от времени. Определить максимальные значения скорости и ускорения для тела массой 200 г.

**13.1.14** Скорость материальной точки массой 100 г задана уравнением  $v = 2\pi \cdot 10^{-1} \cos(2\pi t)$ . Определить максимальное ускорение; смещение и потенциальную энергию материальной точки через  $5/12$  с от начала колебаний; путь, пройденный за то же время.

**13.1.15** В таблице представлены данные о положении шарика, прикреплённого к пружине и колеблющегося вдоль горизонтальной оси Oх, в различные моменты времени.

$t, \text{ с}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
$x, \text{ мм}$	0	5	9	12	14	15	14	12	9	5	0	-5	-9	-12	-14	-15	-14

Найдите период и амплитуду колебаний, максимальную скорость движения шарика.

## 13.2 Свободные механические колебания

**13.2.1<sup>0</sup>** Рассмотрите рисунок 3 и назовите, в каких из приведенных случаев могут возникнуть свободные колебания.

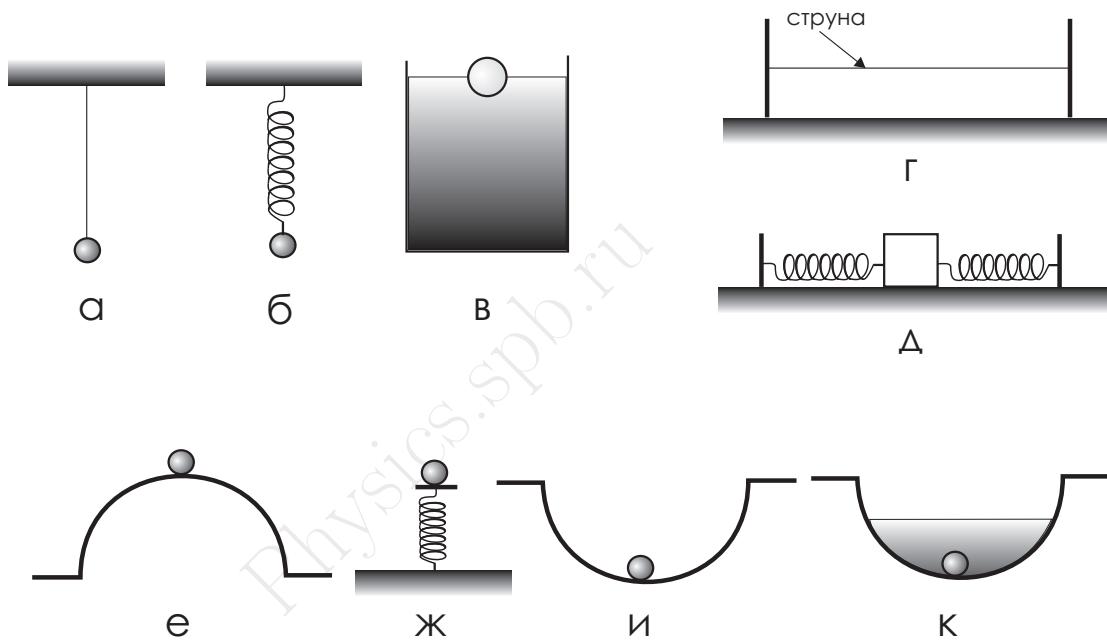


Рис. 3:

**13.2.2** Груз массой 2 кг подвешен на пружине и совершают гармонические колебания, график которых приведен на рисунке 4. Какова жесткость пружины?

**13.2.3** Математический маятник совершает колебания, график которых приведен на рисунке 5. Найдите длину нити маятника.

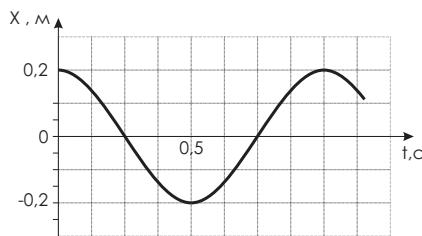


Рис. 4:

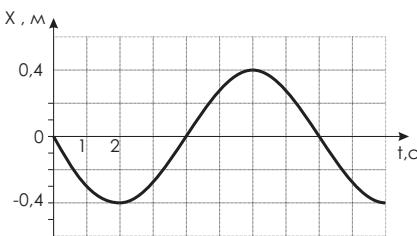


Рис. 5:

**13.2.4** На рисунке 6 представлены графики колебаний трех пружинных маятников. К пружинам этих маятников подвешены грузы одинаковой массы. Чем отличаются друг от друга колебания этих маятников? Что одинакового в этих колебаниях? Найдите массу подвешенного груза и жесткость двух пружин, если жесткость первой 40 Н/м.

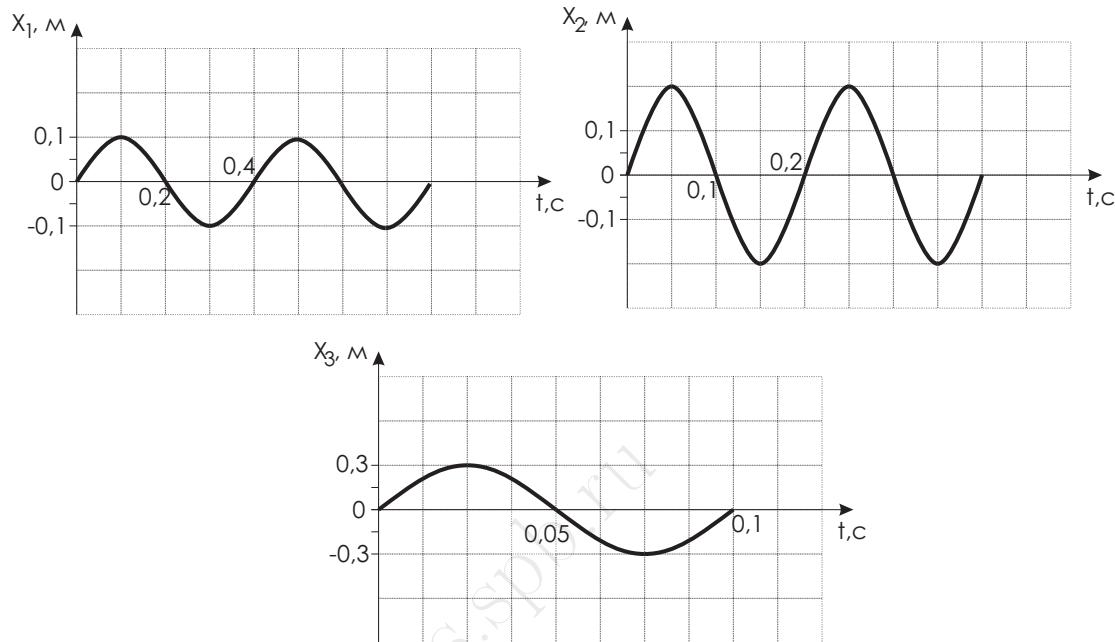


Рис. 6:

**13.2.5** На пружине жесткостью 40 Н/м подвешен груз массой 500 г. Постройте график колебаний этого груза, если амплитуда равна 1 см.

**13.2.6** Демонстрационная пружина имеет постоянную жесткость, равную 10 Н/м. Какой груз следует прикрепить к этой пружине, чтобы период колебаний составлял 5 с?

**13.2.7** Найдите массу груза, который на пружине жесткостью 250 Н/м делает 20 колебаний за 16 с.

**13.2.8** Какую длину имеет математический маятник с периодом колебаний 2 с?

**13.2.9** Математический маятник имеет длину подвеса 10 м. Амплитуда колебания 20 см. Напишите уравнение колебаний  $x(t)$  и постройте график зависимости  $x(t)$ , если колебания начались из положения равновесия.

**13.2.10** Два маятника начинают одновременно совершать колебания. За время первых 15 колебаний первого маятника второй совершил только 10 колебаний. Определите отношение длин маятников.

**13.2.11** За одно и то же время один математический маятник совершает 10 колебаний, а второй 30 колебаний. Известно, что длины маятников отличаются на 10 см. Найти длину каждого маятника.

**13.2.12** Груз на пружине совершает колебания с периодом 1 с, проходя по вертикали расстояние 30 см. Какова максимальная скорость груза? максимальное ускорение?

**13.2.13** Цилиндр, имеющий массу  $m$  и площадь основания  $S$ , свободно плавает в жидкости плотностью  $\rho$ . Определить период гармонических колебаний цилиндра после того, как его погрузили глубже, а затем отпустили. Сопротивление среды не учитывать.

**13.2.14** Вертикальный цилиндр высотой  $H$  и площадью основания  $S$  плавает в жидкости. Плотности материала цилиндра и жидкости соответственно равны  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Определить период малых колебаний цилиндра, возникших после того, как его немного погрузили в жидкость, а затем отпустили. Сопротивлением среды пренебречь.

**13.2.15** В двух вертикальных сообщающихся сосудах находится жидкость массой  $m$ . Выведенная из состояния равновесия, она приходит в колебательное движение. Плотность жидкости равна  $\rho$ , площадь поперечного сечения каждого сосуда  $S$ . Определить период колебания жидкости.

**13.2.16** По условию предыдущей задачи определить период колебаний жидкости, если площади поперечного сечения сосудов равны  $S_1$  и  $S_2$ .

**13.2.17** Груз массой  $m$  совершает упругие колебания под действием пружин жесткостью  $k_1$  и  $k_2$ , присоединенных, как показано на рисунке 7а. Определить период этих колебаний. Изменится ли период, если закрепить пружины, как показано на рисунке б?

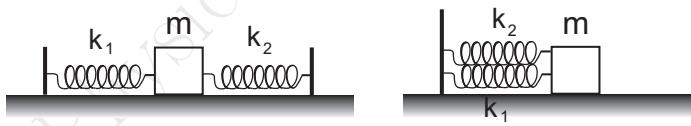


Рис. 7:

**13.2.18** Груз, подвешенный к пружине, совершает колебания с периодом  $T$ . Каким станет период колебаний груза, если точку крепления пружины поместить в ее середине?

**13.2.19** Два математических маятника длиной 0.996 и 0.249 м одновременно начинают колебаться в одинаковых фазах. Через какое время фазы их колебаний снова будут одинаковыми? как часть это будет повторяться ( $g = 9.81/\text{с}^2$ )?

**13.2.20** За какое время совершил одно полное колебание математический маятник, изображенный на рисунке 8, если точка перегиба нити  $B$  находится на одной вертикали с точкой подвеса  $C$  на расстоянии  $1/2$  от нее. Как изменится энергия маятника и максимальная высота подъема после прохождения серединой нити точки  $B$ ?

**13.2.21** К упругой плите, наклоненной на угол  $\beta$  от вертикали, подвешен математический маятник длиной  $l$  (Рис. 9). Маятник отклонили от вертикали на малый угол  $\alpha$  и отпустили. Определить период колебаний маятника, считая соударения его с плитой совершенно упругими. Каким был бы период колебаний при  $\beta/\alpha = 0.866$ ?

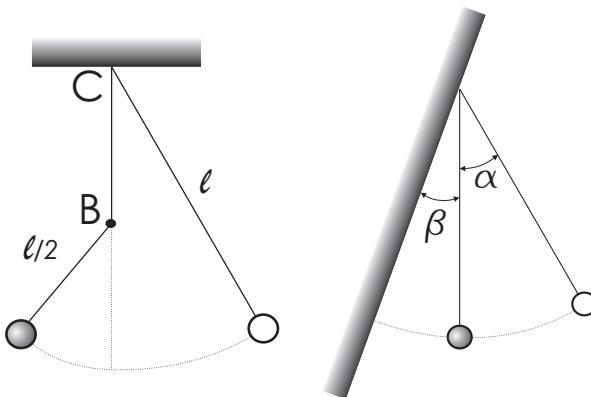


Рис. 8:

Рис. 9:

**13.2.22** Найти период колебаний  $T$  математического маятника длиной  $l$ , подвешенного в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением .

**13.2.23** В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого  $T = 1$  с. С каким ускорением движется лифт, если период колебаний этого маятника стал равным  $T_1 = 1,1$  с? В каком направлении движется лифт?

**13.2.24** По гладкой горизонтальной направляющей длины  $2l$  скользит бусинка с положительным зарядом  $Q > 0$  и массой  $m$ . На концах направляющей находятся положительные заряды  $q > 0$ . Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен  $T$ . Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 2 раза?

### 13.3 Энергия механических колебаний

**13.3.1** Колебания груза описываются уравнением  $x(t) = 0,05 \cos(10\pi t + 4\pi)$ . Жёсткость пружины 40 Н/м. Определите: полную механическую энергию системы; максимальную скорость груза; кинетическую энергию в момент времени  $t = 0,1$  с.

**13.3.2** Груз, подвешенный на пружине жесткостью 200 Н/м, отклонили от положения равновесия и отпустили, в результате чего он начал совершать колебания вдоль вертикальной оси  $Ox$ . В таблице приведены изменения координаты груза  $x$  с течением времени  $t$ .

t, с	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
x, мм	20	14,2	0	-14,2	-20	-14,2	0	14,2	20	14,2

Определить период колебаний, амплитуду, максимальное смещение, максимальную скорость и кинетическую энергию груза в момент времени 0,6 с.

**13.3.3** Математический маятник длиной 1 м колебается по закону  $x = 0,06 \cos(5\pi t)$ . Определите: полную механическую энергию; максимальную скорость груза; массу груза, если в положении равновесия кинетическая энергия равна 0,9 Дж.

**13.3.4** Груз колеблется по закону  $x(t) = 0,04 \cos(12\pi t + 2\pi)$  на пружине жёсткостью 60 Н/м. Найдите: полную энергию системы; момент времени, когда потенциальная энергия максимальна; отношение кинетической и потенциальной энергий в момент времени  $t = 0,05$  с.

**13.3.5** Колебания описываются уравнением  $x(t) = 0,08 \sin(15\pi t + \pi)$ . Жёсткость пружины 100 Н/м. Определите: полную энергию системы; момент времени, когда кинетическая энергия равна половине полной; максимальную потенциальную энергию.

**13.3.6** Колебания описываются уравнением  $x(t) = 0,07 \sin(14\pi t + 2\pi)$ . Масса груза 0,8 кг. Определите: полную механическую энергию системы; момент времени, когда кинетическая энергия максимальна; потенциальную энергию через  $1/4$  периода.

**13.3.7** Два груза массами 0,3 кг и 0,6 кг соединены пружиной и совершают колебания по законам:  $x_1(t) = 0,05 \cos(10\pi t)$  и  $x_2(t) = 0,03 \sin(10\pi t)$ . Определите: полную энергию системы; максимальную силу взаимодействия между грузами.

**13.3.8** Система состоит из двух грузов массами 0,4 кг и 0,6 кг, соединённых пружиной. Колебания описываются уравнениями:  $x_1(t) = 0,04 \cos(16\pi t)$  и  $x_2(t) = 0,06 \sin(16\pi t)$ . Найдите максимальную потенциальную энергию пружины.

**13.3.9** Груз массой 1 кг совершает колебания на пружине по закону  $x(t) = 0,07 \cos(20\pi t)$ . В момент прохождения положения равновесия включается механизм, который сообщает грузу дополнительную энергию 0,5 Дж. Определите: новую амплитуду колебаний; изменение частоты колебаний; полную механическую энергию.

**13.3.10** Груз массой 0,8 кг совершает колебания на пружине по закону  $x(t) = 0,06 \cos(14\pi t + 2\pi)$ . В момент времени  $t = 0,2$  с происходит абсолютно неупругое столкновение с другим грузом массой 0,2 кг. Определите: новую амплитуду колебаний; изменение полной энергии системы; новое уравнение колебаний.

## 13.4 Сложение колебаний

**13.4.1<sup>0</sup>** Материальная точка одновременно участвует в двух колебательных движениях. По какому правилу (скалярного или векторного сложения) определяется результирующее смещение материальной точки?

**13.4.2** По графику зависимости смещения от времени (см. рис. 10) записать уравнение колебания каждого тела, определить разность фаз колебаний двух тел и записать уравнение результирующего колебания, построить его график.

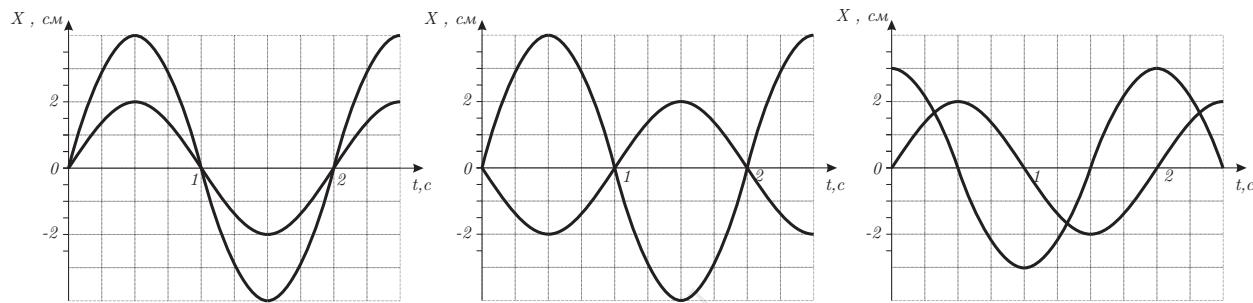


Рис. 10:

**13.4.3** Складываются два гармонических колебания выраженные следующими уравнениями:  $x_1(t) = 0,02 \cos \pi t$  и  $x_2(t) = 0,04 \sin \pi t$ . Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний. Определить циклическую частоту и амплитуду результирующего колебания и записать его уравнение колебания.

## 13.5 Вынужденные колебания. Резонанс

**13.5.1** Для каких маятников, изображенных на рисунке, возможен резонанс? Когда быстрее наступает резонанс - при сильном или слабом затухании собственных колебаний?

**13.5.2<sup>0</sup>** Почему при резонансе возрастает энергия колебательной системы?

**13.5.3<sup>0</sup>** Что необходимо предпринять для прекращения нежелательного резонанса?

**13.5.4** Автомобиль движется по неровной дороге, на которой расстояние между буграми приблизительно равно 8 м. Период свободных колебаний автомобиля на рессорах 1,5 с. При какой скорости автомобиля его колебания в вертикальной плоскости станут особенно заметны?

**13.5.5** При какой скорости поезда пружинный маятник массой 200 г, и жесткостью пружины 20 Н/м находящийся в вагоне, особенно сильно раскачается, если расстояние между стыками рельсов 20 м?

**13.5.6** Математический маятник длиной 1,5 м колеблется в вертикальной плоскости по закону  $x(t) = 0,12 \cos(4\pi t + \pi)$ . На груз массой 0,7 кг действует переменная сила  $F(t) = 0,3 \sin(18\pi t)$ . Определите частоту вынужденных колебаний груза; изменение полной механической энергии системы за период.

**13.5.7** Груз совершает колебания по закону  $x(t) = 0,08 \cos(12\pi t)$  на пружине жёсткостью 80 Н/м. В момент прохождения положения равновесия на груз начинает действовать периодическая сила  $F(t) = 2 \cos 6\pi t$ . Определите: с какой частотой и с какой амплитудой будут совершать вынужденные колебания, новую полную механическую энергию системы; новый закон колебаний;

## 13.6 Поправки к ходу часов.

**13.6.1** На сколько отстанут часы с маятником за сутки, если их с полюса перенести на экватор? Считать, что на полюсе часы шли правильно ( $g_p \approx 9.83 \text{ м/с}^2$ ,  $g_e \approx 9.78 \text{ м/с}^2$ ).

**13.6.2** Часы с маятником точно идут на уровне моря. На сколько будут отставать за сутки часы, если их поднять на высоту 4.0 км? Радиус Земли равен  $6.4 \cdot 10^3$  км.

**13.6.3** На сколько отстанут за сутки часы с латунным маятником при повышении температуры на 20 К? Маятник можно считать математическим. Температурный коэффициент расширения латуни  $\alpha = 2.0 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ .

**13.6.4** На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте 10 км был равен периоду его колебаний на поверхности Земли? Вращение Земли не учитывать.

**13.6.5** Определить, на сколько отстанут маятниковые часы за сутки, если их поднять на высоту 5 км над поверхностью Земли. Вращение Земли не учитывать.

## 13.7 Механические колебания и удары.

**13.7.1** В шар массой  $M = 1\text{кг}$ , лежащий на горизонтальном гладком столе и прикрепленной к невесомой пружине жесткостью 625 Н/м, попадает пуля массой 10 г, имеющая в момент удара скорость 400 м/с, направленную через центр шара вдоль оси пружины, и застревает в нем. Вычислить: а)амплитуду колебаний; б)максимальную возвращающую силу; в)частоту колебаний; г)записать уравнение  $x(t)$ ;

Временем пробоя пренебречь.

**13.7.2** Деревянный шар массой  $M = 1 \text{ кг}$ , подвешенный на легкой нерастяжимой нити, совершает гармонические колебания по закону  $x = 0.1 \sin \omega t$ . Горизонтально летящая со скоростью 100 м/с пуля массой 0.01 кг пробивает шар через центр в плоскости качания встречным ударом и застревает в нем в момент времени  $t = \frac{7}{2}T$ . На какую высоту при этом поднимется шар от положения равновесия? Какова длина нити? Временем пробоя пренебречь. Считать, что чисто механический характер колебаний не изменится. Построить график  $x(t)$

**13.7.3** В деревянный шар массой  $M = 0.1 \text{ кг}$ , висящий на невесомой пружине с жесткостью 10 Н/м попадает такой же массы пластилиновый шарик, летящий вертикально вверх, и прилипает к нему. Удар центральный. При этом пружина сжимается до длины в недеформированном состоянии. Время удара ничтожно мало. Найти: скорость пластилинового шарика; б) частоту возникших колебаний.

**13.7.4** На легкую горизонтальную подставку укрепленную на невесомой вертикальной пружине с жесткостью  $625 \text{ Н/м}$  с высоты  $h=4 \text{ м}$  относительно пластины падает грузик массой  $100 \text{ г}$  и остается на ней. С какой амплитудой будут совершаться колебания и какова их частота? Время удара ничтожно мало.

**13.7.5** Диск массой  $M$  подвешен на пружине с жесткостью  $k$ . С высоты  $h$  на диск соосно падает кольцо массы  $m$ , вследствие чего система совершает гармонические колебания. Пренебрегая массой пружины и считая удар абсолютно неупругим, найти амплитуду колебаний.