

13 Механические колебания

13.1 Уравнение гармонических колебаний

13.1.1 Определить наименьшую разность фаз колебаний маятников, изображенных на рисунке 1. Смещение каждого маятника равно амплитуде. Сохранится ли разность смещения фаз в случае рисунка а? в случае рисунка б?

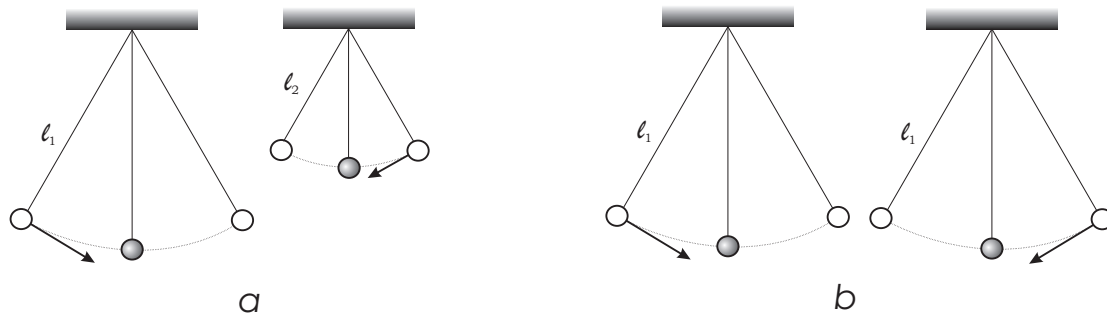


Рис. 1:

13.1.2 Подвешенный на нити грузик совершает гармонические колебания. В таблице представлены координаты грузика через одинаковые промежутки времени. Какова максимальная скорость грузика?

t(c)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
x (см)	6	3	0	-3	-6	-3	0	3

13.1.3 Подвешенный на нити грузик совершает гармонические колебания. В таблице представлены координаты грузика через одинаковые промежутки времени. Найти период, циклическую частоту, амплитуду и максимальную скорость грузика? Запишите уравнение колебаний $x(t)$.

t(c)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
x (см)	6	3	0	3	6	3	0	3

13.1.4 Записать уравнения гармонических колебаний при следующих параметрах: 1) $A = 10.0$ см, $\varphi_0 = \pi/4$, $\omega = 2\pi$; 2) $A = 5.0$ см, $\varphi_0 = \pi/2$, $T = 2$ с; 3) $A = 4.0$ см, $\varphi_0 = \pi$, $\nu = 2.0$ Гц.

13.1.5 Записать уравнение гармонических колебаний при следующих параметрах: $A = 5.0 \cdot 10^{-2}$ м, $T = 0.01$ с, $\varphi_0 = 0$. Определить частоту колебаний; циклическую частоту; амплитуды скорости и ускорения; полную энергию гармонических колебаний для тела массой $m = 0.10$ кг.

13.1.6 Гармонические колебания материальной точки описываются уравнением $x = 2 \sin[\pi(t/4 + 1/2)]$, где смещение выражено в сантиметрах, а время - в секундах. Определить амплитуду, начальную фазу и период колебаний.

- 13.1.7** Материальная точка совершает гармонические колебания с начальной фазой, равной нулю, проходит первую половину амплитуды за 0.05 с. Записать уравнение гармонических колебаний, если амплитуда равна $2 \cdot 10^{-2}$ м. За какое время она пройдет четверть амплитуды из положения равновесия?
- 13.1.8** Сколько времени в течение одного периода материальная точка, совершающая гармонические колебания, находится в интервале со смещением от $+A/2$ до $-A/2$?
- 13.1.9** По графику гармонических колебаний (Рис. 2) записать уравнение движения материальной точки и определить её максимальную скорость.

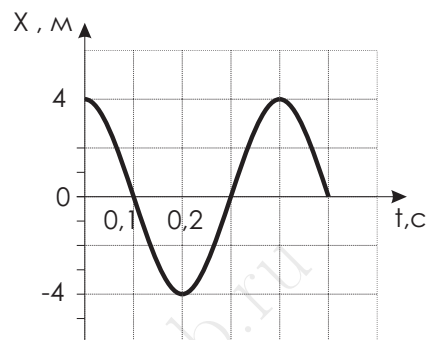


Рис. 2:

- 13.1.10** Используя параметры гармонических колебаний, показанных на рисунке к предыдущей задаче, записать уравнения зависимости скорости и ускорения от времени. Определить мгновенные значения скорости и ускорения для момента времени 0,35 с.
- 13.1.11** Тело массой 50 г совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 2,0 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(20\pi t + \pi/2)$. Определить максимальное смещение; начальную фазу; частоту колебаний; максимальную возвращающую силу.
- 13.1.12** Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой 10 Гц, в положении равновесия имеет скорость 6,28 м/с. Определить максимальные значения смещения и ускорения; записать уравнение гармонических колебаний с начальной фазой, равной нулю.
- 13.1.13** Скорость тела при гармонических колебаниях определяется уравнением $v = 0,060 \sin(100t)$. Записать уравнение зависимости смещения от времени. Определить максимальные значения скорости и ускорения для тела массой 200 г.
- 13.1.14** Скорость материальной точки массой 100 г задана уравнением $v = 2\pi \cdot 10^{-1} \cos(2\pi t)$. Определить максимальное ускорение; смещение и потенциальную энергию материальной точки через $5/12$ с от начала колебаний; путь, пройденный за то же время.
- 13.1.15** В таблице представлены данные о положении шарика, прикрепленного к пружине и колеблющегося вдоль горизонтальной оси Oх, в различные моменты времени.

t, с	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
x, мм	0	5	9	12	14	15	14	12	9	5	0	-5	-9	-12	-14	-15	-14

Найдите период и амплитуду колебаний, максимальную скорость движения шарика.

13.2 Свободные механические колебания

13.2.1⁰ Рассмотрите рисунок 3 и назовите, в каких из приведенных случаев могут возникнуть свободные колебания.

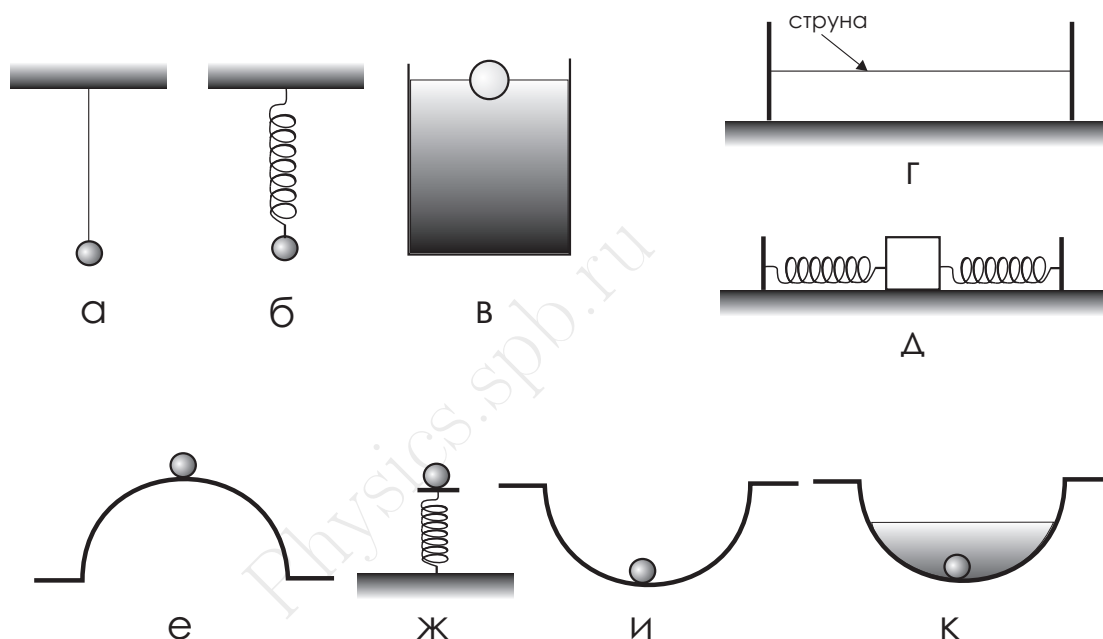


Рис. 3:

13.2.2 Груз массой 2 кг подвешен на пружине и совершает гармонические колебания, график которых приведен на рисунке 4. Какова жесткость пружины?

13.2.3 Математический маятник совершает колебания, график которых приведен на рисунке 5. Найдите длину нити маятника.

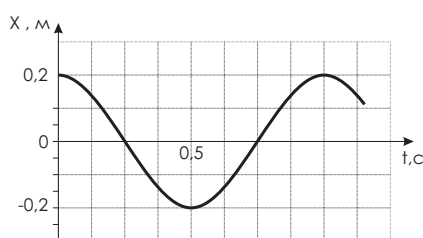


Рис. 4:

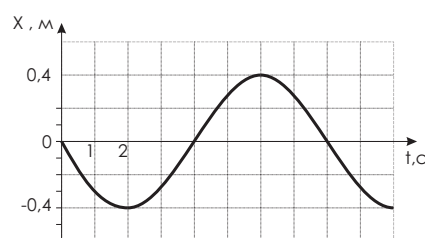


Рис. 5:

13.2.4 На рисунке 6 представлены графики колебаний трех пружинных маятников. К пружинам этих маятников подвешены грузы одинаковой массы. Чем отличаются друг от друга колебания этих маятников? Что одинакового в этих колебаниях? Найдите массу подвешенного груза и жесткости двух пружин, если жесткость первой 40 Н/м.

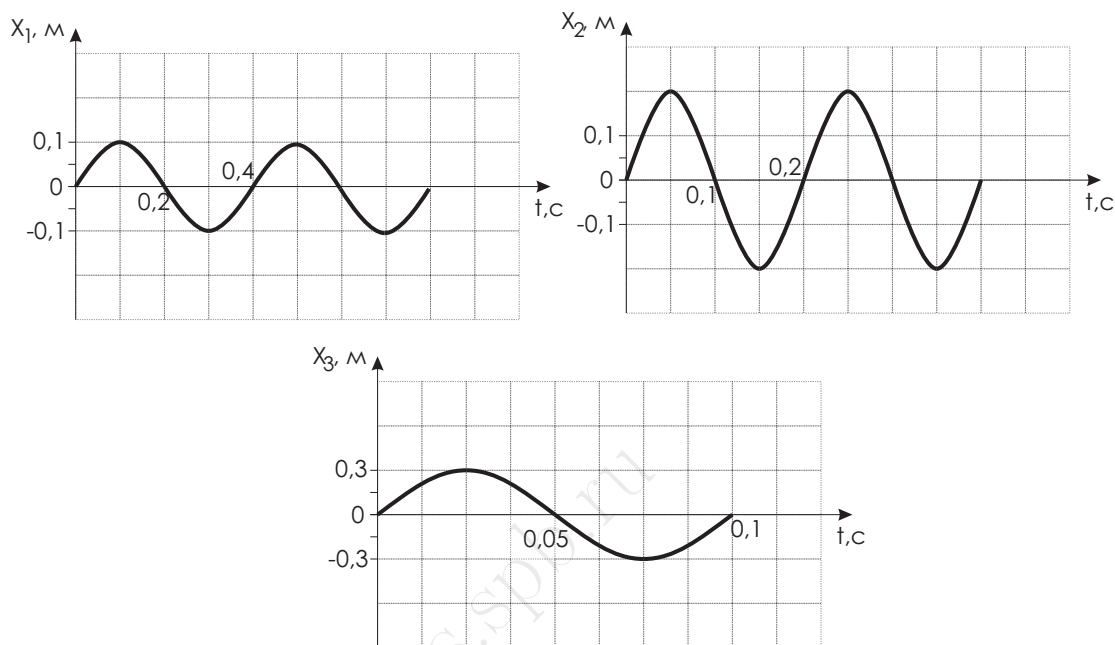


Рис. 6:

13.2.5 На пружине жесткостью 40 Н/м подвешен груз массой 500 г. Постройте график колебаний этого груза, если амплитуда равна 1 см.

13.2.6 Демонстрационная пружина имеет постоянную жесткость, равную 10 Н/м. Какой груз следует прикрепить к этой пружине, чтобы период колебаний составлял 5 с?

13.2.7 Найдите массу груза, который на пружине жесткостью 250 Н/м делает 20 колебаний за 16 с.

13.2.8 Какую длину имеет математический маятник с периодом колебаний 2 с?

13.2.9 Математический маятник имеет длину подвеса 10 м. Амплитуда колебания 20 см. Напишите уравнение колебаний $x(t)$ и постройте график зависимости $x(t)$, если колебания начались из положения равновесия.

13.2.10 Два маятника начинают одновременно совершать колебания. За время первых 15 колебаний первого маятника второй совершил только 10 колебаний. Определите отношение длин маятников.

13.2.11 За одно и то же время один математический маятник совершает 10 колебаний, а второй 30 колебаний. Известно, что длины маятников отличаются на 10 см. Найдите длину каждого маятника.

- 13.2.12** Груз на пружине совершает колебания с периодом 1 с, проходя по вертикали расстояние 30 см. Какова максимальная скорость груза? максимальное ускорение?
- 13.2.13** Цилиндр, имеющий массу m и площадь основания S , свободно плавает в жидкости плотностью ρ . Определить период гармонических колебаний цилиндра после того, как его погрузили глубже, а затем отпустили. Сопротивление среды не учитывать.
- 13.2.14** Вертикальный цилиндр высотой H и площадью основания S плавает в жидкости. Плотности материала цилиндра и жидкости соответственно равны ρ_1 и ρ_2 . Определить период малых колебаний цилиндра, возникших после того, как его немного погрузили в жидкость, а затем отпустили. Сопротивлением среды пренебречь.
- 13.2.15** В двух вертикальных сообщающихся сосудах находится жидкость массой m . Выведенная из состояния равновесия, она приходит в колебательное движение. Плотность жидкости равна ρ , площадь поперечного сечения каждого сосуда S . Определить период колебания жидкости.
- 13.2.16** По условию предыдущей задачи определить период колебаний жидкости, если площади поперечного сечения сосудов равны S_1 и S_2 .
- 13.2.17** Груз массой m совершает упругие колебания под действием пружин жесткостью k_1 и k_2 , присоединенных, как показано на рисунке 7а. Определить период этих колебаний. Изменится ли период, если закрепить пружины, как показано на рисунке б?

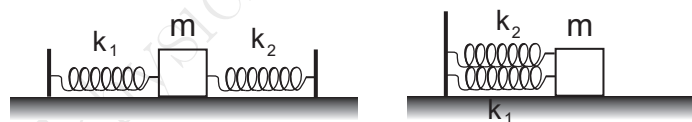


Рис. 7:

- 13.2.18** Груз, подвешенный к пружине, совершает колебания с периодом T . Каким станет период колебаний груза, если точку крепления пружины поместить в ее середине?
- 13.2.19** Два математических маятника длиной 0.996 и 0.249 м одновременно начинают колебаться в одинаковых фазах. Через какое время фазы их колебаний снова будут одинаковыми? как часто это будет повторяться ($g = 9.81/\text{с}^2$)?
- 13.2.20** За какое время совершит одно полное колебание математический маятник, изображенный на рисунке 8, если точка перегиба нити B находится на одной вертикали с точкой подвеса C на расстоянии $1/2$ от нее. Как изменится энергия маятника и максимальная высота подъема после прохождения серединой нити точки B ?
- 13.2.21** К упругой плите, наклоненной на угол β от вертикали, подвешен математический маятник длиной l (Рис. 9). Маятник отклонили от вертикали на малый угол α и отпустили. Определить период колебаний маятника, считая соударения его с плитой совершенно упругими. Каким был бы период колебаний при $\beta/\alpha = 0.866$?

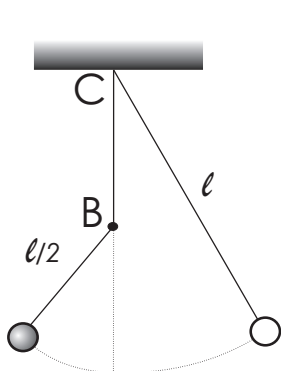


Рис. 8:

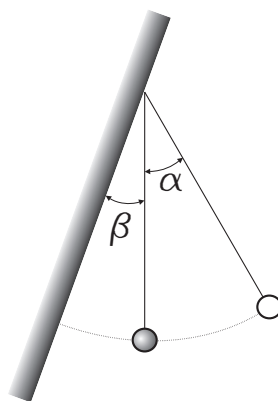


Рис. 9:

- 13.2.22** Найти период колебаний T математического маятника длиной l , подвешенного в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением.
- 13.2.23** В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого $T = 1$ с. С каким ускорением движется лифт, если период колебаний этого маятника стал равным $T_1 = 1,1$ с? В каком направлении движется лифт?
- 13.2.24** По гладкой горизонтальной направляющей длины $2l$ скользит бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m . На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$. Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T . Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 2 раза?

13.3 Энергия механических колебаний

- 13.3.1** Колебания груза описываются уравнением $x(t) = 0,05 \cos(10\pi t + 4\pi)$. Жёсткость пружины 40 Н/м. Определите: полную механическую энергию системы; максимальную скорость груза; кинетическую энергию в момент времени $t = 0,1$ с.
- 13.3.2** Груз, подвешенный на пружине жесткостью 200 Н/м, отклонили от положения равновесия и отпустили, в результате чего он начал совершать колебания вдоль вертикальной оси Ox . В таблице приведены изменения координаты груза x с течением времени t .

t, с	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
x, мм	20	14,2	0	-14,2	-20	-14,2	0	14,2	20	14,2

Определить период колебаний, амплитуду, максимальное смещение, максимальную скорость и кинетическую энергию груза в момент времени 0,6 с.

- 13.3.3** Математический маятник длиной 1 м колеблется по закону $x = 0,06 \cos(5\pi t)$. Определите: полную механическую энергию; максимальную скорость груза; массу груза, если в положении равновесия кинетическая энергия равна 0,9 Дж.

- 13.3.4** Груз колеблется по закону $x(t) = 0,04 \cos(12\pi t + 2\pi)$ на пружине жёсткостью 60 Н/м. Найдите: полную энергию системы; момент времени, когда потенциальная энергия максимальна; отношение кинетической и потенциальной энергий в момент времени $t = 0,05$ с.
- 13.3.5** Колебания описываются уравнением $x(t) = 0,08 \sin(15\pi t + \pi)$. Жёсткость пружины 100 Н/м. Определите: полную энергию системы; момент времени, когда кинетическая энергия равна половине полной; максимальную потенциальную энергию.
- 13.3.6** Колебания описываются уравнением $x(t) = 0,07 \sin(14\pi t + 2\pi)$. Масса груза 0,8 кг. Определите: полную механическую энергию системы; момент времени, когда кинетическая энергия максимальна; потенциальную энергию через $1/4$ периода.
- 13.3.7** Два груза массами 0,3 кг и 0,6 кг соединены пружиной и совершают колебания по законам: $x_1(t) = 0,05 \cos(10\pi t)$ и $x_2(t) = 0,03 \sin(10\pi t)$. Определите: полную энергию системы; максимальную силу взаимодействия между грузами.
- 13.3.8** Система состоит из двух грузов массами 0,4 кг и 0,6 кг, соединённых пружиной. Колебания описываются уравнениями: $x_1(t) = 0,04 \cos(16\pi t)$ и $x_2(t) = 0,06 \sin(16\pi t)$. Найдите максимальную потенциальную энергию пружины.
- 13.3.9** Груз массой 1 кг совершает колебания на пружине по закону $x(t) = 0,07 \cos(20\pi t)$. В момент прохождения положения равновесия включается механизм, который сообщает грузу дополнительную энергию 0,5 Дж. Определите: новую амплитуду колебаний; изменение частоты колебаний; полную механическую энергию.
- 13.3.10** Груз массой 0,8 кг совершает колебания на пружине по закону $x(t) = 0,06 \cos(14\pi t + 2\pi)$. В момент времени $t = 0,2$ с происходит абсолютно неупругое столкновение с другим грузом массой 0,2 кг. Определите: новую амплитуду колебаний; изменение полной энергии системы; новое уравнение колебаний.

13.4 Сложение колебаний

13.4.1⁰ Материальная точка одновременно участвует в двух колебательных движениях. По какому правилу (скалярного или векторного сложения) определяется результирующее смещение материальной точки?

13.4.2 По графику зависимости смещения от времени (см. рис. 10) записать уравнение колебания каждого тела, определить разность фаз колебаний двух тел и записать уравнение результирующего колебания, построить его график.

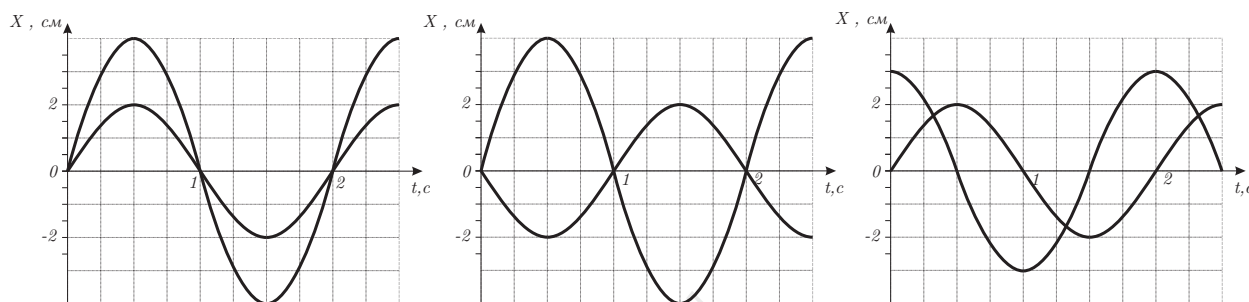


Рис. 10:

13.4.3 Складываются два гармонических колебания выраженные следующими уравнениями: $x_1(t) = 0,02 \cos \pi t$ и $x_2(t) = 0,04 \sin \pi t$. Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний. Определить циклическую частоту и амплитуду результирующего колебания и записать его уравнение колебания.

13.5 Вынужденные колебания. Резонанс

13.5.1 Для каких маятников, изображенных на рисунке, возможен резонанс? Когда быстрее наступает резонанс - при сильном или слабом затухании собственных колебаний?

13.5.2⁰ Почему при резонансе возрастает энергия колебательной системы?

13.5.3⁰ Что необходимо предпринять для прекращения нежелательного резонанса?

13.5.4 Автомобиль движется по неровной дороге, на которой расстояние между буграми приблизительно равно 8 м. Период свободных колебаний автомобиля на рессорах 1,5 с. При какой скорости автомобиля его колебания в вертикальной плоскости станут особенно заметны?

13.5.5 При какой скорости поезда пружинный маятник массой 200 г, и жесткостью пружины 20 Н/м находящийся в вагоне, особенно сильно раскачается, если расстояние между стыками рельсов 20 м?

13.5.6 Математический маятник длиной 1,5 м колеблется в вертикальной плоскости по закону $x(t) = 0,12 \cos(4\pi t + \pi)$. На груз массой 0,7 кг действует переменная сила $F(t) = 0,3 \sin(18\pi t)$. Определите частоту вынужденных колебаний груза; изменение полной механической энергии системы за период.

13.5.7 Груз совершает колебания по закону $x(t) = 0,08 \cos(12\pi t)$ на пружине жёсткостью 80 Н/м. В момент прохождения положения равновесия на груз начинает действовать периодическая сила $F(t) = 2 \cos 6\pi t$. Определите: с какой частотой и с какой амплитудой будут совершать вынужденные колебания, новую полную механическую энергию системы; новый закон колебаний;

13.6 Поправки к ходу часов.

13.6.1 На сколько отстанут часы с маятником за сутки, если их с полюса перенести на экватор? Считать, что на полюсе часы шли правильно ($g_p \approx 9.83 \text{ м/с}^2$, $g_e \approx 9.78 \text{ м/с}^2$).

13.6.2 Часы с маятником точно идут на уровне моря. На сколько будут отставать за сутки часы, если их поднять на высоту 4.0 км? Радиус Земли равен $6.4 \cdot 10^3 \text{ км}$.

13.6.3 На сколько отстанут за сутки часы с латунным маятником при повышении температуры на 20 К? Маятник можно считать математическим. Температурный коэффициент расширения латуни $\alpha = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

13.6.4 На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте 10 км был равен периоду его колебаний на поверхности Земли? Вращение Земли не учитывать.

13.6.5 Определить, на сколько отстанут маятниковые часы за сутки, если их поднять на высоту 5 км над поверхностью Земли. Вращение Земли не учитывать.

13.7 Механические колебания и удары.

13.7.1 В шар массой $M = 1 \text{ кг}$, лежащий на горизонтальном гладком столе и прикрепленной к невесомой пружине жесткостью 625 Н/м, попадает пуля массой 10 г, имеющая в момент удара скорость 400 м/с, направленную через центр шара вдоль оси пружины, и застревает в нем. Вычислить: а) амплитуду колебаний; б) максимальную возвращающую силу; в) частоту колебаний; г) записать уравнение $x(t)$;

Временем пробоя пренебречь.

13.7.2 Деревянный шар массой $M = 1 \text{ кг}$, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, совершает гармонические колебания по закону $x = 0.1 \sin \omega t$. Горизонтально летящая со скоростью 100 м/с пуля массой 0.01 кг пробивает шар через центр в плоскости качания встречным ударом и застревает в нем в момент времени $t = \frac{7}{2}T$. На какую высоту при этом поднимется шар от положения равновесия? Какова длина нити? Временем пробоя пренебречь. Считать, что чисто механический характер колебаний не изменится. Построить график $x(t)$

13.7.3 В деревянный шар массой $M = 0.1 \text{ кг}$, висящий на невесомой пружине с жесткостью 10 Н/м попадает такой же массы пластилиновый шарик, летящий вертикально вверх, и прилипает к нему. Удар центральный. При этом пружина сжимается до длины в недеформированном состоянии. Время удара ничтожно мало. Найти: скорость пластилинового шарика; б) частоту возникших колебаний.

- 13.7.4** На легкую горизонтальную подставку укрепленную на невесомой вертикальной пружине с жесткостью 625 Н/м с высоты $h=4 \text{ м}$ относительно пластины падает грузик массой 100 г и остается на ней. С какой амплитудой будут совершаться колебания и какова их частота? Время удара ничтожно мало.
- 13.7.5** Диск массой M подвешен на пружине с жесткостью k . С высоты h на диск соосно падает кольцо массы m , вследствие чего система совершает гармонические колебания. Пренебрегая массой пружины и считая удар абсолютно неупругим, найти амплитуду колебаний.

Physics.spb.ru