# 6 Статика.

## 6.1 Введение

До сих пор мы в основном рассматривали поступательное движение и во всех задачах тело принимали за материальную точку. Но были и примеры непоступательного движения. При рассмотрении системы тел соединенных нитью, перекинутой через блок, блок вращался, хотя силы натяжения нитей компенсировались реакцией в оси блока. Равенство сил не обеспечивает полный покой тела, т.е. возможно вращение тела. В данном разделе мы будем изучать те случаями, когда тело полностью находится в состоянии покоя.

**Def.** Статика – это раздел механики, в котором изучаются условия равновесия тел.

Условия равновесия тел представляют собой частный случай динамических уравнений, когда ускорение отсутствует. Но исторически статика возникла из потребностей строительной техники почти на два тысячелетия раньше динамики.

Статика позволяет определять условия равновесия разнообразных сооружений, которые создают строители: здания, арки, подъемные краны и т.д.



**Def.** Равновесие — это состояние, при котором все точки тела или системы тел под действием приложенных сил остаются в покое в данной выбранной системе отсчёта.

Проще всего рассмотреть условия равновесия *абсолютно твердого тела.*

**Def.** Тело, размеры и форму которого можно считать неизменными, принято называть абсолютно твердым телом.

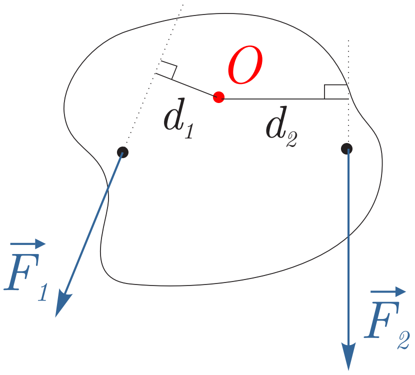
Понятие абсолютно твердого тела является абстракцией, поскольку все реальные тела под влиянием приложенных к ним сил в той или иной степени деформируются, т.е. меняют свою форму и размеры. Величина деформаций зависит как от приложенных к телу сил, так и от свойств самого тела - его формы и свойств материала, из которого оно сделано. Во многих практически важных случаях деформации бывают малыми и использование представлений об абсолютно твердом теле являются оправданными.

*Абсолютно твердое тело – основная физическая модель статики.* **model**

В отличие от кинематики и динамики, где форма и размеры тела были не важны, в статике ими будет нельзя пренебречь, а также будет важна точка приложения сил, которые действуют на тело.

## 6.2 Основные понятия статики

Вспомним определение силы: сила - мера взаимодействия двух тел, в результате которого тела деформируются и приобретают ускорения.




Давайте рассмотрим следующий пример: попробуем открыть дверь, нажимая на нее по середине. Это будет тяжелее, чем если мы будем нажимать с краю. Величина силы для данной двери будет зависеть от расстояния до петель, на которых она висит, т.е. от расстояния до оси вращения.

Для характеристики вращающего действия силы вводится понятие момента силы:

$$\boxed{|M| = F \cdot d} \qquad (1)$$

**Def.** Моментом силы называется произведение величины силы на ее плечо.

**Def.** Плечо силы - кратчайшее расстояние от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила.

Единица измерения: $[M] = Н \cdot м$

Правило знаков: Разные силы могут вращать тело в разных направления. Для того, чтобы это учесть, введем знак момента силы

**Def.** Будем считать момент силы положительным, если данная сила вращает тело по часовой стрелке. В противном случае момент силы будем считать отрицательным.

$$M_1 = F_1 d_1 < 0 \qquad M_2 = F_2 d_2 > 0$$

Правило знаков условно, т.е. главное, чтобы моменты сил, вращающих тела в разных направлениях, имели разные знаки.

## 6.3 Условие равновесия абсолютно твердого тела

**St.** *В инерциальной системе отсчета твердое тело находится в равновесии(отсутствует поступательное движение), если векторная сумма всех действующих на него внешних сил равна нулю*

При выполнении этого условия тело не будет двигаться поступательно, но может совершать вращения относительно некоторой оси. Для того, чтобы исключить вращения, необходимо ввести дополнительное условие.

Правило моментов:

**St.** *Опыт показывает, что тело не будет вращаться, если алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело, будет равна нулю.*

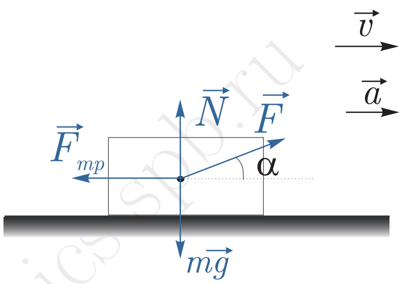
Условие полного покоя тела можно записать в следующем виде:

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_i M_i = 0} \tag{2}$$

Точка, относительно которой записывается правило моментов, может не соответствовать реальной оси вращения, и выбирается эта точка исключительно из соображений удобства: уравнение моментов будет тем проще, чем больше сил будут иметь равные нулю моменты.

## 6.4 Сложение сил с учетом правила моментов

До сих пор мы складывали силы не учитывая моменты этих сил. Мы переносили силы в одно точку тела и складывали их, используя правило треугольника или параллелограмма. Но можно ли так делать, если тело имеет возможность вращаться относительно некоторой точки.




Например, в случае поступательного движения автомобиля мы знаем что автомобиль не может вращаться, поэтому можем перенести силу трения, действующую вдоль поверхности Земли, в точки соприкосновения с ней колес в центр автомобиля.

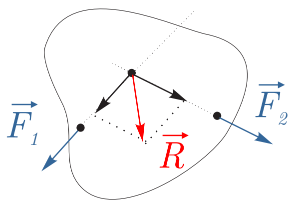
Если же тело имеет возможность вращаться то силы надо складывать так, чтобы алгебраическая сумма моментов не менялась. Для этого можно сформулировать следующее правило:

**St.** → ***Точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия силы, т.к. момент силы от этого не меняется.***

Рассмотрим сложение параллельных и непараллельных сил:

- *Сложение непараллельных сил*

  Если силы непараллельны, то линии их действия пересекаются.




Тогда точки приложения этих сил можно перенести в точку пересечения линий их действия. Алгебраическая сумма моментов от этого не изменится.

А далее воспользоваться правилом параллелограмма.

Метод проекций: Оперировать векторными равенствами трудно, поэтому мы стараемся перейти к скалярным уравнениям (например к уравнениям проекций).

Найдем сумму $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Для этого выберем систему координат и спроецируем это уравнение на координатные оси:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$
$$a_x + b_x = c_x$$
$$a_y + b_y = c_y$$

*Проекция суммы двух векторов на координатную ось равна сумме проекций векторов.*

Однозначность: Если даны две силы, то задача нахождения равнодействующей имеет одно единственное решение.

*Равнодействующая двух сил не может быть меньше разности и больше суммы сил, равнодействующей которых она является*

$$|F_1 - F_2| \leq R \leq |F_1 + F_2|$$

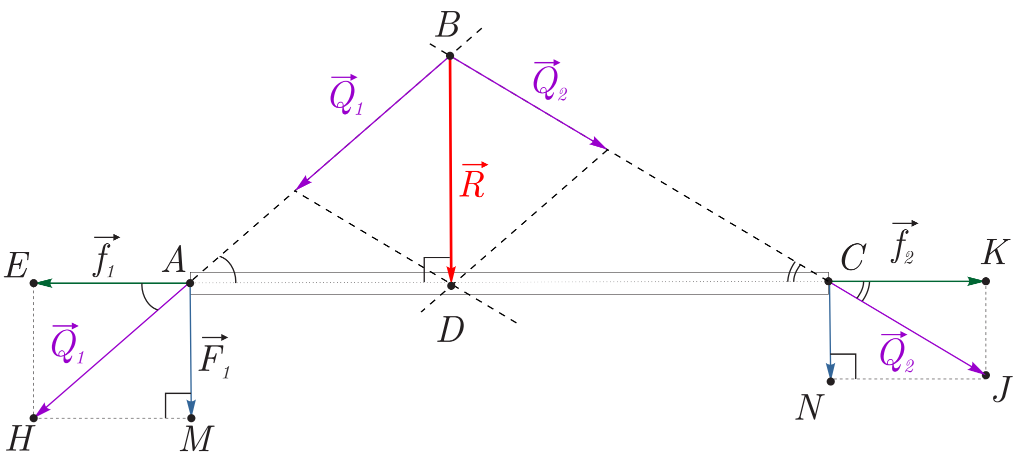
Разность и сумма будут соответствовать следующим углам между силами $F_1$ и $F_2$: $\alpha = 0°; 180°$

- *Сложение параллельных сил*

Если силы параллельны друг другу, то линии их действия не пересекаются. Как в этом случае сложить силы, не нарушив правила моментов?

Необходимо свести случай параллельных сил к случаю непараллельных сил.

Рассмотрим тело, на которое действуют силы $F_1$ и $F_2$, параллельные друг другу.




Подействуем на тело еще двумя силами $f_1$ и $f_2$, такими что

$$\vec{f_1} = -\vec{f_2}$$

и эти силы действуют вдоль одной линии.

Добавив такие силы, мы не изменим второй закон Ньютона, т.к. эти силы уравновешивают друг друга. Правило моментов при этом также не изменится, т.к. из-за того? что они действуют по одной линии, плечи этих сил будут одинаковыми, а моменты будут отличаться по знаку, т.к. силы стараются вращать тело в разные стороны.

$$M_{f_1} = f_1 d_1 = -f_2 d_2 = -M_{f_2}$$

.

Сложим силы $f_1$, $F_1$ и $f_2$,$F_2$

$$\vec{Q}_1 = \vec{f}_1 + \vec{F}_1$$
$$\vec{Q}_2 = \vec{f}_2 + \vec{F}_2$$

Силы $Q_1$ и $Q_2$ не параллельны, поэтому можно использовать правило параллелограмма.
$\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{F}_1 + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Таким образом, равнодействующая сил $F_1$ и $F_2$ равна сумме этих сил. И т.к. эти силы сонаправлены, то и равнодействующая будет сонаправлена с ними.

Осталось найти точку приложения равнодействующей силы. Для этого рассмотрим следующие подобные треугольники(эти треугольники прямоугольные и у них равны вертикальные углы):



$$\triangle AEH \backsim \triangle ADB$$
$$\triangle CKJ \backsim \triangle BCD$$

из подобия получается соотношение сторон

$$\frac{|EA|}{|EH|} = \frac{|AD|}{|BD|} \qquad \frac{|CK|}{|KJ|} = \frac{|DC|}{|BD|}$$
$$\frac{f_1}{F_1} = \frac{|AD|}{|BD|} \qquad \frac{f_2}{F_2} = \frac{|DC|}{|BD|}$$

поделим одно уравнение на другое

$$\frac{f_1 F_2}{F_1 f_2} = \frac{|AD| \cdot |BD|}{|BD| \cdot |DC|}$$

т.к. $f_1 = f_2$ их можно сократить, в итоге получается

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{F_2}{F_1}$$

*Равнодействующая параллельных сил делит расстояние между ними в отношении обратном отношению сил.*

## 6.5 Понятие центра масс и центра тяжести.

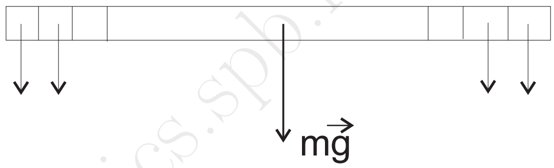
В твердом теле, состоящем из огромного числа точек, есть одна замечательная точка - центр масс. Эта точка замечательна тем, что ее движение происходит по очень простым законам.

Точка приложения силы не важна при поступательном движении, поскольку все точки тела движутся по одинаковым траекториям.

**Def.** Центр масс - это точка, через которую должно проходить направление действия сил, сообщающих телу поступательное движение.

Но центр масс не единственная особенная точка. Как найти точку? к которой приложена сила тяжести. До сих пор мы брали для однородного и симметричного тела центральную точку. А как найти точку для неоднородного или несимметричного тела?

**Def.** Точка, через которую проходит равнодействующая всех параллельных сил тяжести, действующих на тело (при любом положении тела), называется центром тяжести тела




**St.** *Центр масс совпадает с центром тяжести в однородном гравитационном поле.*

Доказательство:Когда тело находится в свободном падении, оно движется поступательно. Следовательно, при любом положении тела сила тяжести пройдет через центр масс, следовательно, центр масс совпадает с центром тяжести.

Замечание:

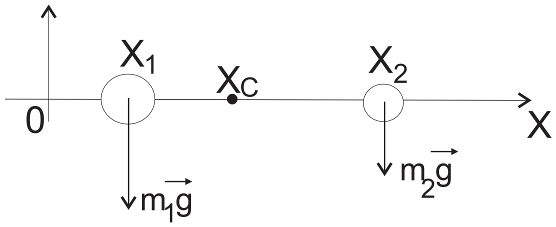
- Центр масс не совпадает с центром тяжести, если размеры тела настолько велики, что надо учитывать непараллельность сил тяжести, действующих на отдельные его части.
- Понятие центра масс является более общим, чем понятие центра тяжести. Это обуславливается тем, что для центра масс не имеет никакого значения то, действуют ли на тела системы какие-либо силы или нет, тогда как понятие центра тяжести требует наличия внешних сил - сил гравитации.
- Далее, рассматривая тела вблизи поверхности Земли, будем говорить о центре масс, используя, что он совпадает с центром тяжести.

Замечание: Говорить о центре тяжести системы "Земля - Луна"бессмысленно. Силы тяготения для этой системы являются внутренними и компенсируют друг друга.

### 6.5.1 Формула центра масс.

Найдем формулу, определяющую положение центра масс. Для этого рассмотрим следующий пример. Пусть есть невесомый стержень соединяющий два шарика $m_1$ и $m_2$.

Для определения положения центра масс, рассмотрим силы тяжести, действующие на тела в этой системе.




Пусть равнодействующая приложена в точке с координатой $x_c$, тогда, используя способ сложения параллельных сил, найдем равнодействующую двух сил тяжести:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{m_2 g}{m_1 g} \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Аналогично можно проделать для любого количества масс. Тогда в общем случае получим:

$$x_c = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}$$

аналогичное выражение можно записать и для координаты $y_c, z_c$.

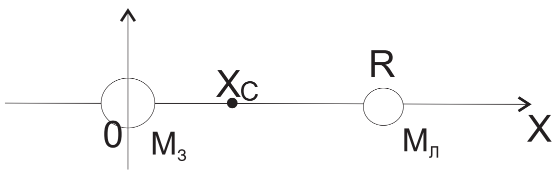
Таким образом, получаем векторное выражение для центра масс:

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i}{m}} \qquad m = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \tag{3}$$

где $\vec{r}_c$ - радиус-вектор определяющий положение центра тяжести.

Из полученной формулы видно, что положение центра масс зависит от распределения массы тела в пространстве и не зависит от наличия силы тяжести.

Пример: Найти положение центра масс системы Земля-Луна.




Чтобы найти центр масс этой системы нужно заменить Землю и Луну материальными точками соответствующих масс и расположить их в центре масс Земли и Луны соответственно.

$$x_c = \frac{m_З \cdot 0 + m_Л \cdot R}{m_З + m_Л} = \frac{R}{1 + \frac{m_З}{m_Л}} = \frac{384000\text{км}}{82} = 4682\text{км}$$

Здесь учтено то, что среднее расстояние между Землей и Луной составляет 384 000 км, и масса Земли больше массы Луны в 81 раз.

Таким образом получилось, что Земля и Луна вращаются относительно точки, которая находится на расстоянии 4700 км от центра Земли, а не относительно центра Земли. И именно эта точка вращается относительно Солнца по земной орбите, а Земля и Луна вокруг нее.

**Law** **_Теорема о движении центра масс_** ***Центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием тех же внешних сил, которые действую на данное тело.***

Теорема будет доказана в теме закон сохранения и изменения импульса тела.

Следствие: Внутренние силы системы не могут изменить положения центра масс этой системы.

Свойства центра масс:

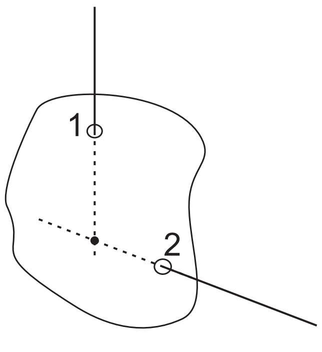
- Положение центра масс не зависит от выбора системы отсчета и определяется только взаимным положением масс системы
- Если центр масс является точкой опоры, то тело находится в равновесии.
- Центр масс может находится *вне* тела.

**Способы определения центра масс**

- *Геометрический*

  У всех однородных фигур, имеющих центр симметрии, центр масс совпадает с центром симметрии

- *Опытным путем*




Плоскую фигуру подвешиваем в точке 1 и даем прийти в равновесие. Затем подвешиваем в точке 2. И в том и в другом слуае центр масс находится на продолжении линии подвеса.($M_{mg} = 0$). Следовательно, момент находится в точке пересечения.

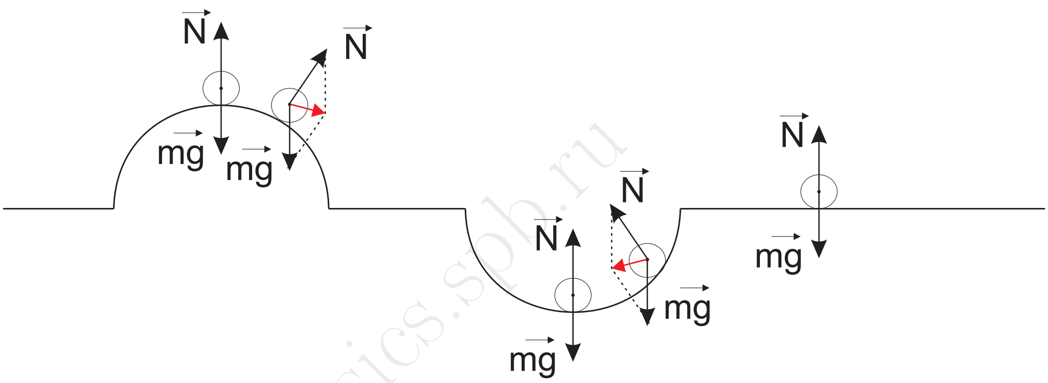
- Расчет центра масс, в основу которого положено правило моментов.

## 6.6 Виды равновесия

В соответствии с условием равновесия, тело не будет двигаться поступательно и не будет вращаться относительно какой-либо оси, если будут выполнены обе части условия равновесия: векторная сумма всех сил будет равна нулю и суммарный момент сил тоже будет равен нулю. В этом случае принято говорить, что тело покоится или находится в равновесии.

Но равновесия могут быть разными. Обычно принято выделять следующие виды равновесия:

- Устойчивое равновесие;
- Неустойчивое равновесие;
- Безразличное равновесие.




Рассмотрим эти виды равновесия на примере шарика, покоящегося на поверхности. Во всех случаях в состоянии равновесия на шарик будут действовать две силы - сила тяжести и сила нормальной реакции опоры.

Если шарик покоится на вершине горки, то при отклонение шарика от положения равновесия поменяет свое направление сила нормальной реакции опоры и равнодействующая будет направлена в сторону от положения равновесия. Поэтому без внешнего воздействия тело более не вернется на вершину горки.

Если шарик находится на дне ямы, то при отклонении шарика от положения равновесия, равнодействующая будет направлена в сторону этого положения и шарик через какое-то время вернется в него.

Если же шарик находится на горизонтальной поверхности, то при любом смещении шарик будет оставаться в состоянии покоя.

Соответственно можно дать следующие определения:

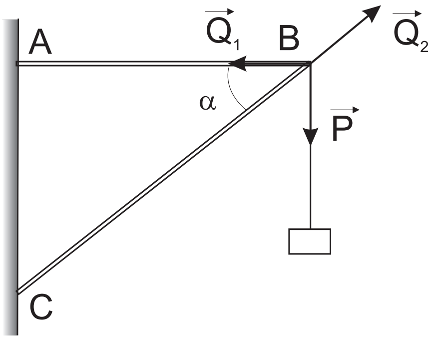
**Def.** Равновесие называется устойчивым, если при смещении тела относительно этого положения, оно будет стремиться вернуться в положение равновесия.

**Def.** Равновесие называется неустойчивым, если при смещении тела из этого положения, оно никогда в него не вернется без внешнего воздействия.

**Def.** Равновесие называется безразличным, если любое смещение тела приводит его к новому положение равновесия, такому же как было.

## 6.7 Конструкции на вертикальных стенках

Рассмотрим груз закрепленный на вертикальной стене. Он находится в равновесии. Обычно в таких задачах известна масса груза, геометрия конструкции и просят найти силы реакции внутри конструкции.




Рассмотрим силы действующие на точку подвеса, на точку $B$. На нее действует вес груза, сила реакции стержня $AB$ и $BC$.

Под действием веса стержень $AB$ немного растягивается, т.е. испытывает деформацию растяжения в результате чего внутри стержня возникает сила упругости, которая стремится вернуть его в недеформированное состояние. В результате стержень $AB$ действует на точку $B$ с силой реакции $Q_1$.

Аналогично, стержень $BC$ сжимается и действует на точку $B$ с силой реакции $Q_2$.

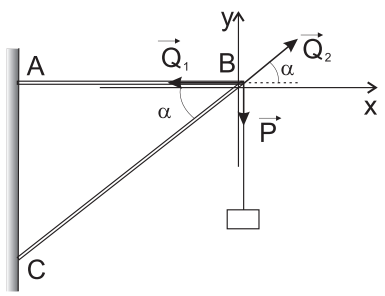
Т.к. точка $B$ неподвижна, как и вся конструкция, можно записать условие равновесия для нее:

$$\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{0} \qquad M_P + M_{Q1} + M_{Q2} = 0$$

При отсутствии подвижных шарнирных соединений, для решения задачи достаточно взять либо одну часть условия равновесия, либо другую.

Решение через II закон Ньютона (метод сложения)

Повторим рисунок с силами действующими на точку $B$ и добавим систему координат.




Запишем второй закон Ньютона

$$\vec{P} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{0}$$

спроецируем векторное уравнение на координатные оси:

$$"x" : Q_2 \cos\alpha - Q_1 = 0$$
$$"y" : Q_2 \sin\alpha - P = 0$$

Т.к. груз покоится, его вес равен величине силы тяжести, действующей на него:

$$P = mg$$

Тогда получается

$$"x" : Q_2 \cos\alpha = Q_1$$
$$"y" : Q_2 \sin\alpha = mg$$

поделив одно уравнение на другое получим

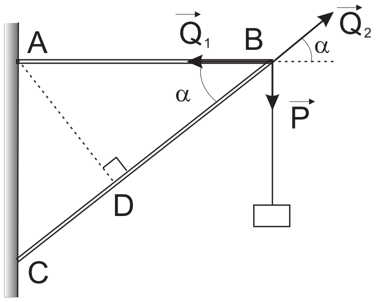
$$Q_1 = mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

и из проекции на ось "OY"можно получить вторую силу

$$Q_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

Решение через правило моментов

Повторим решение, используя правило моментов.




Запишем правило моментов относительно точки C. Выбор оси вращения делается таким образом, чтобы момент неизвестной силы был равен нулю. Относительно точки C момент силы $Q_2$ будет нулевым.

$$M_{Q1} + M_{Q2} + M_P = 0$$

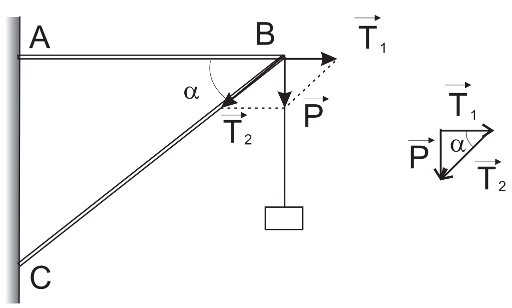
$$-Q_1 \cdot |AC| + Q_2 \cdot 0 + P \cdot |AB| = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = mg\frac{|AB|}{|AC|} = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Аналогично, если записать правило моментов относительно точки $A$ можно найти $Q_2$. При этом плечо $Q_2$ это высота, опущенная из точки $A$ на линию действия силы, т.е. отрезок $|AD|$.

$$Q_1 \cdot 0 + P \cdot |AB| - Q_2 \cdot |AD| = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = mg\frac{|AB|}{|AD|} = mg \cdot \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

Решение через разложение (метод разложения)

Третий способ решения использует возможность разложения силы на составляющие по направлениям. В данном случае, вес груза по направлению каждого стержня.




$$\vec{P} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

здесь $T_1$ - та часть веса тела, которая растягивает стержень $AB$, а $T_2$ - которая сжимает стержень $BC$, эти силы по третьему закону Ньютона

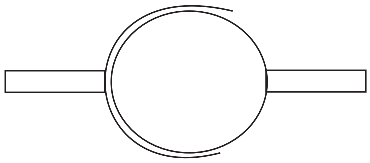
$$\vec{T}_1 = -\vec{Q}_1$$
$$\vec{T}_2 = -\vec{Q}_2$$

При этом вектора $\vec{P}$, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ образуют прямоугольный треугольник, подобный $\Delta ABC$, отсюда

$$Q_1 = T_1 = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$
$$Q_2 = T_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

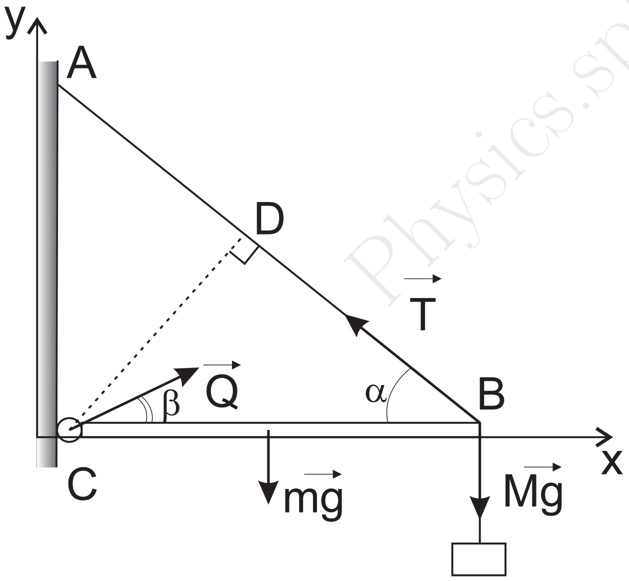
## 6.8 Шарнирное соединение

Шарнирным соединение называется подвижная связь, характерной особенностью которой является то, что в ней неизвестно направление силы реакции. Связано это с тем, что связь организовано посредством двух шаров, один из которых полый, внутрь которого вставлен другой шар.



В задачах с шарнирным соединение необходимо учитывать, что направление реакции неизвестно. Рассмотрим пример задачи.

Балка массой $m$ и длиной $l$, шарнирной закреплена на вертикальной стене. Конец балки удерживается тросом, который образует угол $\alpha$ с балкой. На конце балки подвешен груз массой $M$. Найти силу натяжения троса и силу реакции в шарнире.




Т.к. направление силы реакции $Q$ неизвестно, выберем произвольное, так чтобы угол силы реакции относительно балки был равен $\beta$. Запишем второй закон Ньютона для балки

$$\vec{Q} + \vec{T} + m\vec{g} + M\vec{g} = \vec{0}$$

проекции на координатные оси

$$"x" : Q\cos\beta - T\cos\alpha = 0$$
$$"y" : Q\sin\beta + T\sin\alpha - mg - Mg = 0$$

далее запишем правило моментов относительно точки C (т.к. момент неизвестной силы Q равен нулю относительно нее):

$$mg\frac{l}{2} + Mgl - T|CD| = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\frac{l}{2} + Mgl - Tl\sin\alpha = 0$$

в итоге получили систему из трех уравнений:

$$Q\cos\beta - T\cos\alpha = 0$$
$$Q\sin\beta + T\sin\alpha - mg - Mg = 0$$
$$mg\frac{l}{2} + Mgl - Tl\sin\alpha = 0$$

Из третьего уравнения можно получить силу натяжения троса

$$T = \frac{g(\frac{m}{2} + M)}{\sin\alpha}$$

Выразим $Q$ из первого уравнения и $T$ из третьего и подставим все во второе

$$Q = T\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$T\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta + T\sin\alpha - g(m+M) = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\beta T\cos\alpha + T\sin\alpha = (m+M)g$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{(m+M)g - T\sin\alpha)}{T\cos\alpha}$$

зная угол $\beta$, можно рассчитать $Q$ по формуле $Q = T\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.