4 Силы в природе.

4.1 Введение

В динамике Ньютона природа сил, входящих в основные уравнения, несущественна. Второй закон Ньютона определяет ускорение тела независимо от природы сил, вызывающих это ускорение.

Все многообразие встречающихся в природе взаимодействий сводится всего лишь к четырем типам:

- гравитационное
- электромагнитное
- ядерное или сильное
- слабое взаимодействие

Из них, используя понятие силы в смысле механики Ньютона, можно рассматривать только гравитационное и электромагнитное взаимодействия. Ядерные и слабые взаимодействия проявляются на столь малых расстояниях, когда законы классической механики уже неприменимы. Область проявления этих взаимодействий ограничена процессами, происходящими с атомными ядрами и элементарными частицами.

В отличие от короткодействующих ядерного и слабого взаимодействий, гравитационное и электромагнитное взаимодействия - дальнодействующие: их действие проявляется на очень больших расстояниях. По этой причине именно электромагнитное и гравитационное взаимодействия определяют все крупномасштабные явления, начиная от явлений на молекулярном уровне и кончая процессами в далеких галактиках. Все механические явления в окружающем нас макроскопическом мире определяются исключительно гравитационными и электромагнитными силами.

Гравитационные силы описываются наиболее простыми количественными закономерностями, но несмотря на эту простоту, их проявления могут быть весьма сложны и многообразны. Движение планет и спутников, полет артиллерийских снарядов, плавание тел в жидкостях - во всех этих явлениях проявляется действие гравитационных сил.

Количественные закономерности электромагнитных сил гораздо сложнее, а их проявления еще более разнообразны. Кулоновское электростатическое взаимодействие зарядов, действие магнитного поля на заряды и токи, упругие силы в твердых телах, возникающие при их деформации, упругие силы в жидкостях и газах, наконец силы трения при движении тел - все это проявления взаимодействий электромагнитной природы.

Из многообразных проявлений электромагнитных сил мы рассмотрим только два: силу трения и силу упругости.

4.2 Сила трения.

4.2.1 Природа силы трения. Виды трения.

Классификация трения:

- **Вязкое** - трение возникающие при соприкосновении твердого тела с жидкостью и газом.
- **Сухое** - трение возникающие на поверхностях соприкосновения твердых тел
  - трение покоя
  - трение скольжения
  - трение качения

Будем рассматривать сухое трение. Почему же возникает сила трения при соприкосновении поверхностей твердых тел? *Первой причиной* является шероховатость поверхностей. Шероховатости цепляются друг за друга, тем самым препятствуя движению одного тела относительно другого.

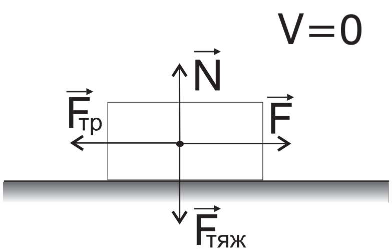
Но тела можно достаточно хорошо отшлифовать, убрав почти все шероховатости. Рассмотрим например два плоских стекла. Если положить одно на другое, то сдвинуть их будет практически невозможно. Но стекла достаточно гладкие, и должны были бы скользить одно по другому. Здесь проявляется *вторая причина* возникновения трения. При отсутствии шероховатостей молекулы двух твердых тел расположены так близко друг к другу, что между ними возникает сила притяжения, а поскольку молекул огромное количество, то два тела прилипают друг к другу.

Def. Природа силы трения заключается в шероховатости поверхностей и взаимодействии молекул.

4.2.2 Трение покоя.

Рассмотрим тело в состоянии покоя на горизонтальной поверхности. В этом состоянии на тело действует сила притяжения Земли $\vec{F}_{тяж}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$.

Слово "нормальной"означает перпендикулярной, т.е. опора реагирует на тело таким образом, что сила воздействия опоры на тело направлена перпендикулярно поверхности опоры.



Попробуем сдвинуть тело в горизонтальном направлении. Для этого будем прикладывать силу $\vec{F}$, меняя ее величину от нули до некоторого значения $F_{кр}$, при котором тело начнет скользить.

Поскольку тело находится в состоянии покоя, в соответствии со II законом Ньютона, на него должна действовать сила равная по величине и противоположено направленная силе F. Это и есть *сила трения покоя*. Эти две силы уравновешивают друг друга в каждый момент времени.

В какую сторону будет направлена сила трения покоя в общем случае?

St. ➡ ***Сила трения покоя направлена в сторону противоположенную возможному перемещению тела.***

Например, на наклонной плоскости сила трения покоя будет направленна вверх, вдоль наклонной плоскости. При этом возможное перемещение будет направлено вниз.

На опыте можно установить, от чего зависит максимальное значение силы трения покоя. Помещая на брусок дополнительные грузы и тем самым увеличивая силу, прижимающую его к поверхности, можно убедиться, что максимальная сила трения покоя прямо пропорциональна этой силе. Иначе можно сказать, что $F_{\text{тр.пок}}$ прямо пропорциональна нормальной реакции опоры. Поскольку прижимающая сила и реакция опоры будут равны по III закону Ньютона.

Таким образом, сила трения покоя зависит от величины нормальной реакции опоры.

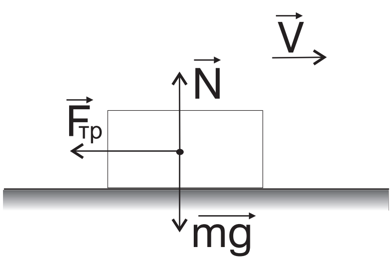
St. ➡ ***Величина силы трения меняется от нуля до некоторого максимального значения, равного $\mu_{\text{тр.пок}} N$***

$$\boxed{F_{\text{тр.пок}} \in [0; \mu_{\text{тр.пок}} N]}$$

Замечание: Благодаря трению покоя обеспечивается равновесие многих технических конструкций и строительных сооружений. Однако в ряде случаев именно сила трения покоя необходима для возникновения движения. Так, например, при ходьбе сила трения покоя, действующая на подошву, сообщает ей ускорение. Ведь подошва не скользит назад и, значит, трение между ней и дорогой - это трение покоя. При движении автомобилей, в отсутствии пробуксовки, сила толкающая автомобиль - это сила трения покоя.

4.2.3 Трение скольжения

Рассмотрим движущееся тело. Предположим, что сила F перестала действовать. В результате, через определенное время тело остановится. Следовательно, на него действовала сила, препятствующая движению. Это сила называется *силой трения скольжения*.



St. *Сила трения скольжения направлена вдоль поверхности соприкосновения тел противоположено относительной скорости.*

От чего будет зависеть трение скольжения? Аналогично трению покоя, сила трения скольжения зависит от прижимающей силы или силы нормальной реакции опоры.

St. *Опыт показывает, что сила трения скольжения прямо пропорциональна величине силы нормальной реакции опоры и не зависит от площади соприкосновения двух тел.*

$$\boxed{F_{\text{тр.ск}} = \mu_{\text{тр.ск}} N}$$

s

Стоит отметить, что последнее равенство является скалярным уравнением, а не векторным. Поскольку сила трения и сила нормальной реакции опоры перпендикулярны друг другу.

4.2.4 Коэффициент трения

Коэффициент трения покоя $\mu_{\text{тр.пок}}$ и коэффициент трения скольжения $\mu_{\text{тр.ск}}$ зависят от сочетания материалов, характера обработки поверхностей и их состояния и не зависит от площади соприкосновения двух тел. **NB!**

Независимость от величины площади соприкосновения можно объяснить так: при увеличении площади в 2 раза, увеличивается число взаимодействующих молекул и шероховатостей, но при этом сила давления уменьшится тоже в 2 раза, поэтому взаимодействие двух тел не изменится.

Но в реальных условиях коэффициент трения покоя зависит от площади соприкосновения поверхностей двух тел. Например, кирпич будет проще сдвинуть с места, если он лежит на торце, а не плашмя.

В случае трения покоя срабатывает эффект запаздывания, поэтому изменение площади соприкосновения приводит к изменению величины силы. Хотя в идеальном случае сила трения покоя также не будет зависеть от площади соприкосновения двух тел.

St. *Коэффициент трения не может быть вычислен теоретически на основе знания о строении поверхности твердого тела, а определяется опытным путем.*

Опыт показывает, что

$$\mu_{\text{тр.пок}} \geqslant \mu_{\text{тр.ск}} \tag{1}$$

Обычно, при не слишком больших скоростях коэффициент трения скольжения не зависит от относительной скорости трущихся поверхностей. Строго говоря, свойство независимости от скорости верно лишь приближенно. Поскольку, коэффициент трения скольжения незначительно уменьшается с увеличением относительной скорости, а затем начинает возрастать.

В дальнейшем будем пренебрегать этой зависимостью от скорости. Тогда можно считать, что коэффициент трения покоя равен коэффициенту трения скольжения

$$\boxed{\mu = \mu_{\text{тр.пок}} = \mu_{\text{тр.ск}} = \frac{F_{\text{тр}}}{N}}$$

Физический смысл коэффициента трения:

Def. Коэффициент трения показывает, какую долю, сила трения составляет от силы нормальной реакции опоры

4.2.5 Графическое описание

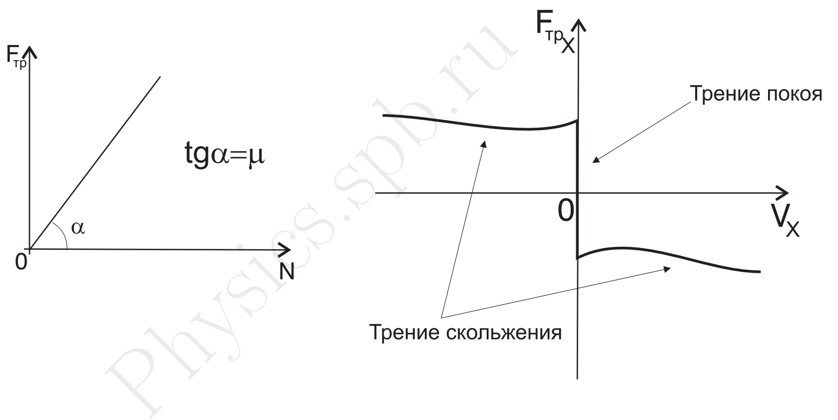


График F(N): *Тангенс угла наклона графика зависимости силы трения от силы нормальной реакции опоры численно равен коэффициенту трения*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \mu \tag{2}$$

Таким образом, если экспериментально построить такую зависимость для двух тел, то можно определить коэффициент трения для этих тел.

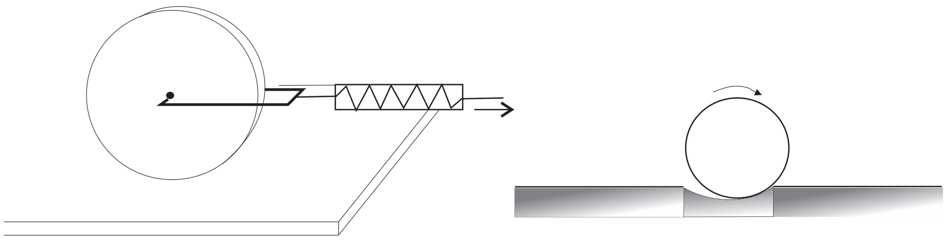
График $F_x(v_x)$:

Из графика зависимости проекции силы трения от проекции скорости можно увидеть, что в состоянии покоя сила меняется от нуля, до некоторого критического значения, затем тело начинает скользить, при этом в первый момент сила трения скольжения уменьшается, а затем начинает увеличиваться.

Также из графика видно, что сила направлена в строну противоположенную относительно скорости.

4.2.6 Трение качения

Возьмем деревянный цилиндр и положим его так, как указано на рисунке.



Если тянуть за динамометр, то цилиндр покатится по столу. По показаниям динамометра можно будет увидеть, что для этого требуется очень небольшая сила, значительно меньшая, чем при скольжении того же самого цилиндра.

Сила, возникающая между цилиндром и поверхностью называется *трением качения.*

Когда шар или цилиндр катится по поверхности другого тела, он немного вдавливается в поверхность этого тела, а сам немного сжимается. Таким образом, катящееся тело всё время вкатывается в горку. Поэтому, чем тверже будут поверхности, тем меньше будет вдавливание и тем меньше трение качения.

St. ➔ ***При том же давлении сила трения качения много меньше силы трения скольжения.***

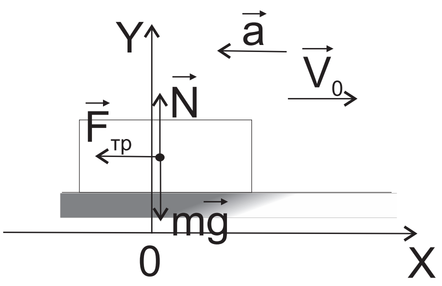
Поэтому в машинах стремятся заменить трение скольжения, трением качения, применяя подшипники.

4.2.7 Пример задачи на силу трения

Сани массой 10 кг, скатившись с горки, проехали по горизонтальной дороге до остановки путь 40 м за 10 с. Найти силу трения и коэффициент трения.

Дано:
$m = 10$кг
$t = 10c$
$S = 40$м
$F_{\text{тр}}, \mu - ?$

Решение:



Сделаем рисунок. На санки действует сила трения, сила тяжести и нормальной реакции опоры. Скорость направлена вправо, а ускорение влево.

Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

В качестве тела отсчета выберем Землю, т..к. тело движется равнозамедленно, ось x направим против ускорения, а начальную координату примем равной $x_0 = 0$

Спроецируем уравнение второго закона Ньютона на координатные оси:

$$\begin{aligned} "x": &\quad -F_{\text{тр}} = -ma \\ "y": &\quad N - mg = 0 \end{aligned}$$

Нам неизвестно ускорение, поэтому запишем уравнения кинематики для равнопеременного движения

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{\vec{a}t^2}{2}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\begin{aligned} "x": &\quad x(t) = x_0 + v_0 t - \tfrac{at^2}{2} \\ "y": &\quad v(t) = v_0 - at \end{aligned}$$

$$0 = v_0 - at \Rightarrow v_0 = at$$

$$S = |x - x_0| = v_0 t - \frac{at^2}{2} = at^2 - \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2S}{t^2}$$

Таким образом:

$$F_{\text{тр}} = ma = m\frac{2S}{t^2}$$

Проверка размерности:

$$[F] = \text{кгм}/c^2 = \text{Н}$$

Подставим числа:

$$F_{\text{тр}} = 10 \cdot \frac{40}{100} = 4\text{Н}$$

Чтобы определить коэффициент трения:

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{F_{\text{тр}}}{mg} = \frac{4}{10 \cdot 10} = 0,04$$

<u>**Ответ:**</u> $F_{\text{тр}}$=4Н, μ=0,04

4.2.8 Вязкое трение

Def. Вязкое трение - трение, возникающие между твердым телом и жидкостью (или газом)

От чего будет зависеть вязкое трение? Для данных тел в основном от скорости относительного движения тела относительно вязкой среды.

St. *Из опыта видно, что сила сопротивления при малых скоростях (v<200 м/с) прямо пропорциональна относительной скорости движения тела в вязкой среде.*

Со скоростями меньше 200 м/с движется большинство тел на Земле, поэтому следующая зависимость будет основной при решении задач классической механики на силу вязкого трения.

$$\boxed{\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}} \quad (3)$$

Здесь коэффициент $k > 0$ - коэффициент сопротивления.

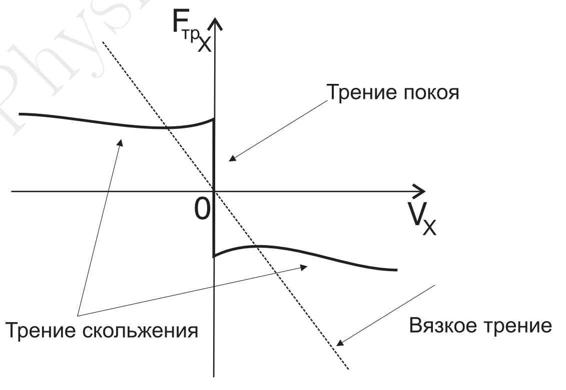
Коэффициент сопротивления зависит от рода жидкости, рода тела, формы и размеров тела.

Единицы измерения: В СИ коэффициент трения измеряется в

$$[k] = H \cdot c/\text{м} = \text{кг}/c$$

Def. Форму тел, при которой сила сопротивления минимальна, при прочих равных условиях, называют обтекаемой формой.

Построим теперь график зависимости проекции силы трения от проекции скорости:



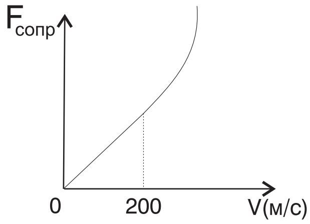
Основное отличие сухого трения от вязкого заключается в том, что для вязкого трения нет понятия трения покоя. **NB!**

Т.е. даже очень маленькая сила вызывает движение тела в жидкости или газе.

При больших скоростях относительного движения сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости:

$$F = kv^2$$

Таким образом, если построить график зависимости силы сопротивления от скорости, то получится следующее:



Стоит обратить внимание, что сама по себе скорость в 200 м/с не является граничной, т.е. при приближении к этой скорости, линейный характер зависимости постепенно переходит в квадратичную зависимость от скорости.

4.3 Силы упругости. Закон Гука.

4.3.1 Природа сил упр угости.

Мы знаем, что, если растянуть пружину и отпустить ее, то она вернется в исходное состояние. Если сжать, то произойдет то же самое. Возвращает тело в исходное состояние сила, которая называется силой упругости.

В отличие от сил трения скольжения, возникающих при движении тел, силы упругости определяются только взаимным расположением взаимодействующих тел и возникают при их деформации.

Def. Сила упругости - сила возникающая внутри деформированного тела и стремящаяся вернуть тело в недеформированное состояние.

Почему же возникает сила, старающаяся вернуть тело в исходное состояние? Для этого необходимо вспомнить строение твердых тел. При любой деформации разные части тела начинают двигаться друг относительно друга с различными скоростями и ускорениями. При этом меняется расстояние между атомами и молекулами. Следовательно, изменение расстояния между узлами кристаллической решетки ведет к изменению взаимодействия атомов (или молекул). Например, при сжатии расстояние между узлами уменьшается, при этом между атомами возникает сила отталкивания, которая старается их вернуть на прежнее расстояние. Поскольку атомов в твердых телах очень много, то сила возникающая в результате такого взаимодействия молекул, будет существенной для макротел.

А поскольку взаимодействие атомов и молекул носит электромагнитный характер (гравитационной взаимодействие очень мало), то и сила упругости относится к электромагнитным взаимодействия.

St. → ***Природа силы упругости заключается во взаимном притяжении и отталкивании молекул и упорядоченном расположении молекул в твердом теле.***

4.3.2 Деформации

Def. Деформация - изменение формы и(или) объема тела

Почему тела деформируются?

Если к какой-либо части тела приложить силу, то некоторое время различные части тела будут двигаться с разным ускорением. Это и приводит к возникновению деформации.

Для твердых тел различают два предельных случая деформаций:

- **Упругие** деформации

  Def. Если после прекращения внешнего воздействия тело полностью восстанавливает свою форму и размеры, то такая деформация называется упругой

Для упругой деформации существует однозначная зависимость между величиной деформации и силой, вызывающей эту деформацию.

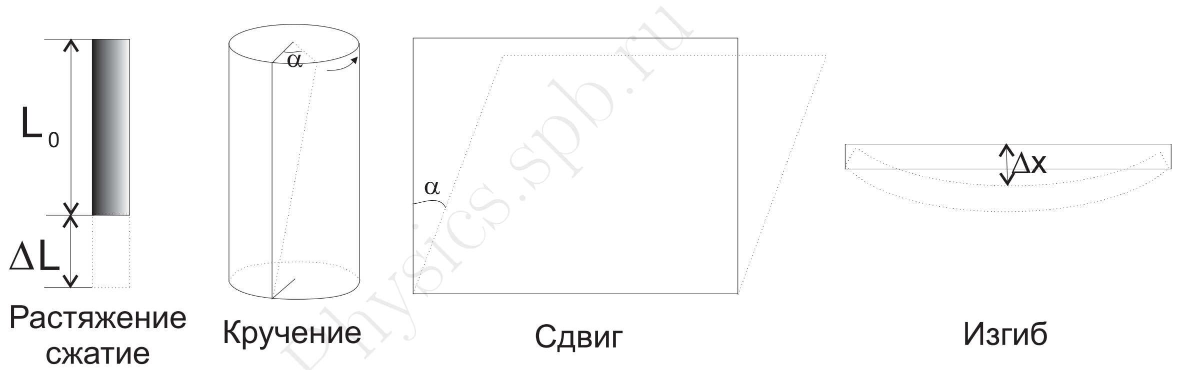
Для упругих деформаций также характерно незначительное изменение форму или размеры тела, т.к. при больших изменениях возможно разрушение кристаллической решетки твердого тела. В этом случае принято говорить о пластической деформации.

- **Пластические** деформации

  При сильном внешнем воздействии тело не сможет полностью восстановить свои форму и размеры. В этом случае принято говорить о пластических деформациях.

Упругие деформации используются всюду, начиная от различного типа амортизационных устройств и пружин и кончая тончайшими измерительными приборами. На пластической деформации основаны различные способы холодной обработки металлов: ковка, прокатка, штамповка и т.д.

Существует еще одна классификация деформаций, связанная с направлением деформации:



- деформация сжатия и растяжения - характеризуется абсолютным и относительным удлинением

$$\Delta l = l - l_0$$
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

- деформация изгиба - характеризуется величиной прогиба
- деформация сдвига - характеризуется углом сдвига
- деформация кручения - характеризуется углом закручивания

4.3.3 Деформации в покоящихся телах

Деформации тела возникают в том случае, когда различные части тела совершают различные перемещения. Основная причина этого процесса, заключается в том, что внешняя сила сообщает ускорение не всем элементам тела одновременно, а той лишь его части, на которую эта сила действует.

Рассмотрим деформацию растяжения горизонтального стержня. Подействуем на стержень двумя одинаковыми силами F_1, F_2, так как это показано на рисунке.

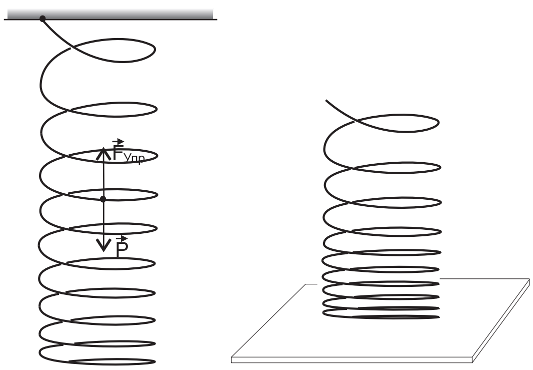
Стержень будет растягиваться. Мысленно разобьем стержень на одинаковые участки. На первый участок действует внешняя сила F_1 и сила упругости со стороны 2-го участка F_{21}. В первый момент внешняя сила больше, поэтому первый участок приобретет ускорение относительно второго. Аналогично можно рассмотреть второй, третий и т.д участки. Растяжение будет происходить до тех пор, пока во всех сечениях не будут действовать силы упругости равные по величине внешним силам.

Замечание:

- Следует отметить, что при этом сила натяжения стержня будет равна величине внешней силы F.
- Деформация в первую очередь возникает в тех частях тела, где прикладывается внешняя сила.

4.3.4 Деформация в покоящихся телах, вызванная силой тяжести

Подвесим пружину. Она растянется. При этом будет видно, что витки пружины в нижней части расположены более плотно. Пружина будет растягиваться до тех пор, пока сила упругости действующая на каждый виток, не будет уравновешена весом нижних, по отношению к данному, витков.



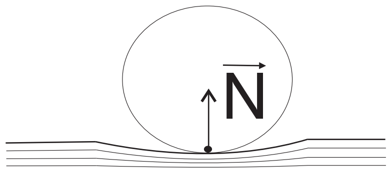
Аналогичные рассуждения можно провести и для пружины, помещенной на горизонтальную поверхность.

Основной особенностью растяжения под действием силы тяжести, является то, что сила тяжести действует одновременно на все участки тела. NB!

Если пружину бросить, то она начнет падать под действием силы тяжести. Опыт показывает, что при этом она придет в недеформированное состояние. Поскольку сила тяжести действует сразу на все витки пружины, она будет сообщать ускорение всем частям тела одновременно.

4.3.5 Сила нормальной реакции опоры

Рассмотрим силу нормальной реакции опоры. Слово *нормальной* означает перпендикулярной поверхности.



Эта сила возникает в случае, если на поверхность помещают другое тело. На поверхность действует сила со стороны тела, под действием которой поверхность деформируется, в результате чего появляется сила упругости, которая пытается вернуть поверхность к недеформированному состоянию. Эта сила упругости и называется силой нормальной реакции опоры.

В результате сила нормальной реакции опоры относится к силам упругости.

4.3.6 Полная сила реакции

Строго говоря, полная сила Q, с которой одно тело действует на поверхность другого, направлена под некоторым углом φ к вертикали. При этом, во многих случаях силу Q удобно рассматривать как сумму двух сил: силы трения и силы нормальной реакции опоры.

$$\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} \tag{4}$$

Это означает, что угол φ образуемый полной силой Q с нормалью к поверхности, для каждой пары поверхностей всегда имеет одно и то же значение, определяемое только коэффициентом трения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \mu \tag{5}$$

4.3.7 Закон Гука

Деформации в твердых телах очень малы, поэтому их наблюдение затруднительно. Будем рассматривать деформации сжатия и растяжения пружины, которую можно считать аналогом цилиндрического твердого тела. Но деформации пружины достаточно велики и поэтому удобны для изучения.

Как уже было сказано, деформация сжатия (растяжения) характеризуется абсолютным удлинением:

$$\Delta l = l - l_0$$

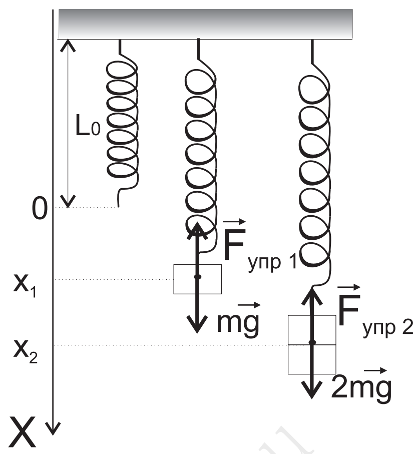
и относительным удлинением

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

.

Роберт Гук (1635-1703?) изучал зависимость величины абсолютного удлинения от силы, вызывающей деформацию тела.

Пусть в недеформированном состоянии указатель, закрепленный на пружине, находится в точке с координатой $x = 0$.



Подвесим на пружину груз массой m. Пружина деформируется и указатель перемещается в точку с координатой x_1. Тогда величина абсолютной деформации будет определяться текущей координатой курсора.

Т.к. пружина перестала деформироваться, то

$$F_{\text{упр 1}} = mg$$

Подвесим на пружину второй такой же груз. Опыт покажет, что пружина переместится в точку с координатой $\underline{x_2 = 2x_1}$, при этом аналогичное равенство для сил будет выглядеть следующим образом

$$F_{\text{упр 2}} = 2mg$$

При в два раза большей деформации сила упругости в пружине стала в два раза больше.

Если после этого грузики убрать, то пружина вернется в недеформированное состояние, т.е. деформация в эксперименте была упругой.

Law

***Закон Гука:* Опыт показывает, что при малых упругих деформациях сила упругости, возникающая в теле, прямо пропорциональна абсолютному удлинению.**

$$\boxed{F_{\text{упр x}} = -kx} \tag{6}$$

где k - коэффициент жесткости пружины.

В каком направлении действует сила?

St. *Сила упругости направлена в сторону, противоположенную абсолютному удлинению тела.*

Единицы измерения k:

$$k = \frac{|F_{\text{упр}}|}{|x|}$$

$$[k] = \frac{H}{\text{м}}$$

Физический смысл:

Коэффициент жесткости показывает, какая сила упругости возникнет в теле при единичном абсолютном удлинении, при условии, что деформация была упругой.

Надо помнить о том, что закон Гука выполняется только для упругих деформаций, поэтому надо учитывать, что не для всех тел единичное абсолютное удлинение будет упругим.

4.3.8 Модуль Юнга

Т.к. коэффициент жесткости является характеристикой тела, он не удобен для составления соответствующих таблиц. Таблицы имеет смысл составлять только для характеристик вещества. Поэтому рассмотрим другой вариант формулировки закона Гука.

Введем новую физическую величину - механическое напряжение:

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}$$

Def. Механическое напряжение показывает, как сила упругости приходится на единицу площади поперечного сечения

Механическое напряжение будет измеряться в $[\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$.

Если повторить опыт Гука не с пружиной а с резиновым жгутом с поперечным сечением S, то опыт покажет

$$\sigma \sim \varepsilon$$

где ε - относительное удлинение.

Переходя от пропорциональной зависимости к равенству, домножим на коэффициент:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \tag{7}$$

где E - модуль Юнга.

Law *Закон Гука: Опыт показывает, что при малых упругих деформациях механическое напряжение, возникающее в теле, прямо пропорционально относительному удлинению.*

Давайте посмотрим, как модуль Юнга связан с коэффициентом жесткости:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{\text{упр}}}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{упр}} = \frac{ES}{l_0}\Delta l$$

но $F_{\text{упр}} = k\Delta l$, поэтому

$$k = \frac{ES}{l_0}$$

Коэффициент жесткости это характеристика тела, отношение $\frac{S}{l_0}$ определяет геометрию тела, поэтому модуль Юнга является характеристикой вещества.

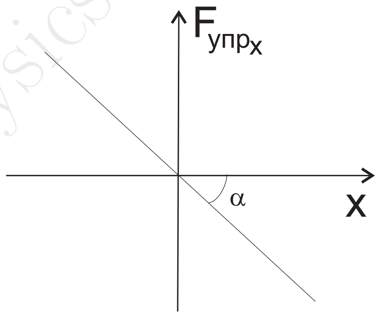
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Физический смысл:

Модуль Юнга это характеристика вещества, которая показывает, какое механическое напряжение возникает в теле при единичном относительном удлинении, если деформация была упругой.

4.3.9 Графическое описание

Построим график зависимости силы упругости от абсолютного удлинения тела:



Тангенс угла наклона графика зависимости силы упругости от абсолютного удлинения численно равен коэффициенту жесткости

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\text{упр}}}{x} = k$$

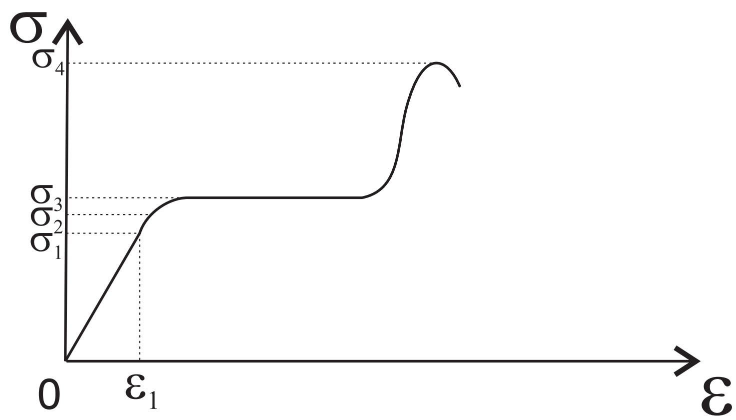
Чем больше угол наклона, тем более жесткое тело

Диаграмма растяжений:

Def. Диаграммой растяжений называется график зависимости механического напряжения от относительного удлинения

При малых деформациях $\varepsilon < \varepsilon_1$ будет выполняться закон Гука, т.е. пропорциональная зависимость $\sigma \sim \varepsilon$, соответственно σ_1 принято называть пределом пропорциональности.

Def. Предел пропорциональности это максимальное механическое напряжение, при котором еще выполняется закон Гука



При дальнейшем увеличении деформации, пропорциональная зависимость начнет нарушаться, но деформация еще будет оставаться упругой. Соответствующее значение σ_2 принято называть пределом упругости.

Def. Предел упругости это максимальное механическое напряжение, при котором деформация еще остается упругой.

Обычно предел пропорциональности и предел упругости не сильно отличаются друг от друга.

Далее упругая деформация переходит в пластическую. При этом увеличение деформации и относительного удлинения, не сопровождается увеличением механического напряжения. В этом случае принято говорить, что материал начинает течь. Соответствующее значение σ_3 принято называть пределом текучести.

Def. Предел текучести это механическое напряжение, при котором материал испытывает пластическую деформацию

.

Если после предела текучести продолжить увеличивать деформацию, перед самым разрушением тела произойдет резкое увеличение механического напряжения и далее образец разрушается. Соответствующее механическое напряжение σ_4 принято называть пределом прочности.

Def. Предел прочности это максимальное механическое напряжение, после которого проходит разрушение тела.

На практике все выше описанные пределы используют при расчетах запаса прочности различных конструкций и механизмов. Запасом прочности обычно называют отношение предела прочности к пределу упругости (или пределу пропорциональности). Для критически важных устройств это значение обычно достигает значения 10.

4.4 Гравитационное взаимодействие

4.4.1 Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения представляет собой обобщение опытных фактов. Факты, из которых Ньютон вывел закон всемирного тяготения, были результатом астрономических наблюдений за движение Луны вокруг Земли и движение планет вокруг Солнца, и были установлены Кеплером.

Ньютон был первым, кто строго доказал, что причина, вызывающая падение камня на землю, движение Луны вокруг Земли, и планет вокруг Солнца - одна и та же. Это сила тяготения, действующая между любыми телами, обладающими массой.

Как и всем другим телам, Земля должна сообщать Луне ускорение, не зависящее от массы Луны. Оказывается, что ускорение Луны в 3600 раз меньше, чем ускорение свободного падения у поверхности Земли. При этом известно, что расстояние от центра Земли до центра Луны приблизительно равно 60 земным радиусам.

Ускорение, которое сообщает телам сила притяжения к Земле, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли:

$$a = \frac{c_1}{r^2}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Т.к. сила всемирного тяготения сообщает всем телам у поверхности Земли одно и то же ускорение, независимо от их массы, то она должна быть пропорциональна массе того тела, на которое она действует.(Если бы силы не зависели от масс ускоряемых тел, то ускорения были бы не одинаковы, а обратно пропорциональны инертным массам.)

Но поскольку, например, Земля действует на Луну с силой, пропорциональной массе Луны, то и Луна по III закону Ньютона, действует на Землю с той же силой, причем эта сила должна быть пропорциональна массе Земли.

Таким образом сила гравитационного притяжения должна быть пропорциональна произведению масс взаимодействующих тел.

Law

***Закон всемирного тяготения:* Сила взаимного притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.**

$$\boxed{F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}} \tag{8}$$

Закон сформулирован для материальных точек. NB!

Почему же мы не чувствуем силу притяжения тел на Земле. Величина этой силы очень мала, это самое слабое из всех взаимодействий. И т.к. масса Земли очень велика, по сравнению с массами тел на ее поверхности, то сила притяжения Земли много больше сил притяжения этих тел.

4.4.2 Гравитационная постоянная

Из формулы закона всемирного тяготения следует, что

$$\gamma = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

γ- показывает, чему равна сила, с которой притягиваются 2 тела, массы которых равны 1 кг и расстояние между которыми равно 1м.

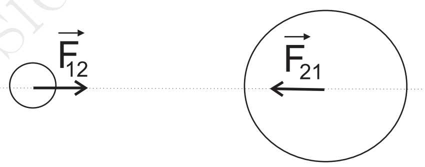
Единицы измерения:

$$[\gamma] = \frac{H\text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

4.4.3 Свойства гравитационных сил

1. Гравитационные силы самые универсальные из всех сил, т.к. все тела обладают массой, они действуют сквозь любые тела и являются дальнодействующими.

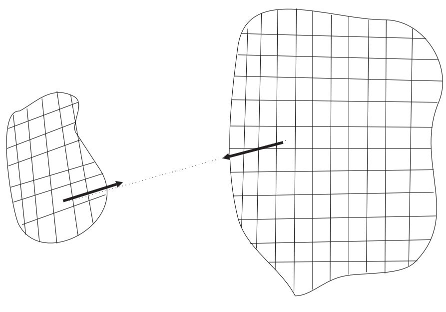
2. Формула закона всемирного тяготения дает только величину силы притяжения точечных тел. На самом деле сила тяготения действует на каждое из взаимодействующих тел. Эти силы равны по величине и противоположены по направлению в соответствии с III законом Ньютона.



St.

Силы гравитационного взаимодействия направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки. Такие силы принято называть центральными.

3. Если размеры тел сравнимы с расстоянием между ними, то каждое тело нужно разделить на элементы, размеры которых малы по сравнению с этим расстоянием.



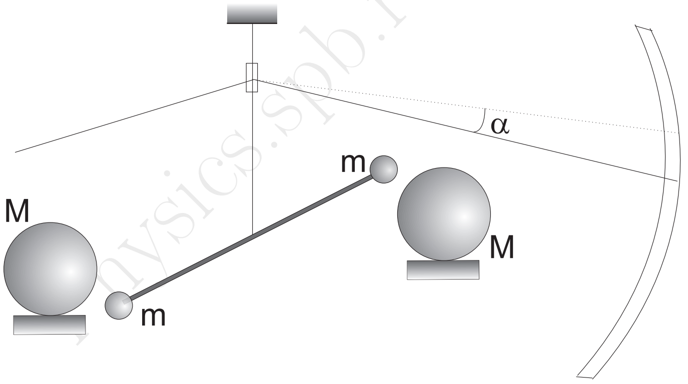
Тогда для взаимного тяготения каждого элемента одного тела с каждым элементом другого тела будет справедлив закон всемирного тяготения. А полная сила взаимного притяжения тел будет равна сумме сил взаимодействий каждого элемента.

4. Если рассматривать взаимодействие однородных шаров, тогда для них можно использовать закон всемирного тяготения без разбиения на элементы. Расстояние между шарами для закона всемирного тяготения будет равно расстоянию между центрами шаров.

4.4.4 Опыт Кавендиша

Гравитационную постоянную невозможно определить теоретически. Для определения γ необходим эксперимент, в котором независимо друг от друга будут измеряться силы, массы и расстояния.

Такой опыт впервые был выполнен Генри Кавендишем в 1798 году с помощью крутильных весов (Видеоэксперимент). К концам коромысла крутильных весов были прикреплены небольшие свинцовые шары. На небольшом расстоянии от них неподвижно закреплялись большие тяжелые шары. Массы всех шаров были известны (m=729 г, M=158 кг).



Под действием сил притяжения малых шаров к большим, коромысло немного поворачивалось, и по закручиванию подвеса измерялась сила.

Угол закручивания измеряли с помощью зеркала, укрепленного на нити крутильных весов. Считая деформацию нити упругой, можно было считать, сила притяжения прямо пропорциональна углу закручивания.

В своих опытах, Кавендиш получил значение γ, всего на 1% отличающееся от установленного в настоящее время.

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{H\text{м}^2}{\text{кг}^2} \tag{9}$$

Знание гравитационной постоянной позволяет определить массы Земли, Солнца и других источников тяготения по наблюдениям за движением в создаваемых ими гравитационных полях.

4.4.5 Равенство инертной и гравитационной масс

Во II-ом законе Ньютона вводилось понятие *инертной* массы, которая характеризовала способность тела приобретать ускорение под действием силы.

В законе всемирного тяготения вводится гравитационная масса ,характеризующая способность тел притягивать к себе другие тела.

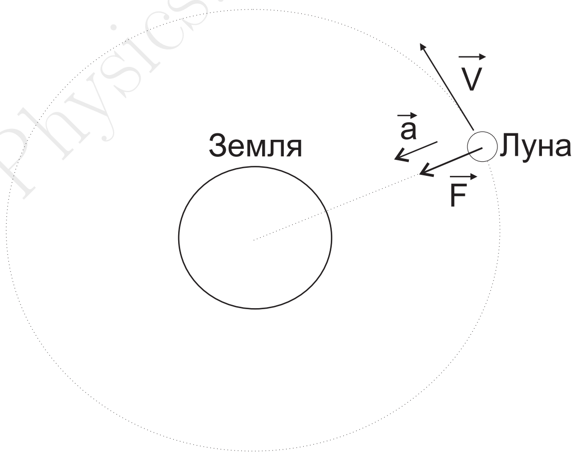
Это два разных свойства материи. Опыт показывает, что они равны. Совпадение инертной и гравитационной масс не имеет под собой физической причины и является случайным.

Но это же равенство лежит в основе созданной Эйнштейном релятивистской теории тяготения.

4.4.6 Взвешивание Земли

Опыт Кавендиша по определению значения гравитационной постоянной называют еще опытом по взвешиванию Земли, т.к. определив значение гравитационной постоянной мы можем рассчитать массу Земли. Для этого необходимо знать период обращения Луны вокруг Земли и расстояние между центрами Луны и Земли.

Будем считать, что Луна движется по круговой орбите вокруг Земли с постоянной скоростью. Запишем второй закон Ньютона для Луны. На нее действует сила гравитационного притяжения к Земле, под действием которой Луна приобретает центростремительное ускорение.



$$\vec{F} = m\vec{a}_n$$

где m - масса Луны.

Спроецируем это равенство на направление, соединяющее центр Земли и центр Солнца:

$$F = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

где $r = 60R_0$ - радиус окружности, по которой движется Луна и соответственно это расстояние между центром Земли и центром Луны, R_0 - радиус Земли.

С другой стороны в соответствии с законом всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

где M - масса Земли Приравняв силы получаем

$$M = \frac{rv^2}{\gamma} = \frac{60R_0}{\gamma}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{60R_0}{\gamma}\left(\frac{2\pi 60R_0}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2(60R_0)^3}{\gamma T^2}$$

4.5 Сила тяжести.

4.5.1 Сила тяжести.

Одним из проявлений закона всемирного тяготения является сила тяжести. Еще Галилео Галилей установил, что все тела падают на Землю *одинаково быстро*. Это означает, что сила с которой Земля притягиев к себе тела, вблизи поверхности, пропорциональна массе этих тел.

$$F \sim m \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = mg}$$

где g - ускорение свободного падения, направленное к центру Земли.

Def. Сила тяжести – это сила, с которой Земля притягивает к себе тела, вблизи поверхности.

Из закона всемирного тяготения следует, что сила тяжести будет равна:

$$F = \gamma \frac{mM}{R_0^2}$$

Тогда отсюда можно получить, что

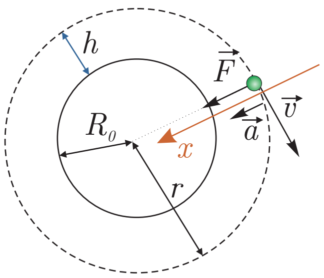
$$\cancel{m}g = \gamma \frac{\cancel{m}M}{R_0^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{gR_0^2 = \gamma M} \tag{10}$$

где R_0 - радиус Земли.

Конечно, полученная формула верна не только для Земли. Ею можно пользоваться для вычисления ускорения свободного падения любой планеты.

4.5.2 Зависимость g от расстояния до центра Земли

1. Если тело находится на некоторой высоте h над поверхностью Земли, сопоставимой по величине с радиусом Земли, тогда, если ввести следующее обозначение:

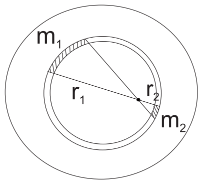


$$g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_0^2}$$
$$r = R_0 + h$$

можно записать

$$g = \gamma \frac{M_0}{(R_0+h)^2} = g_0 \frac{R_0^2}{r^2}$$

2. Как изменится ускорение свободного падения внутри Земли? Будем считать, что Земля представляет собой сплошной однородный шар. Рассмотрим, как сила тяжести зависит от положения тела внутри однородного шара.



Очевидно, что в центре Земли эта сила равна нулю. Если бы вдруг она оказалась отлична от нуля, то куда бы она была направлена? Ведь ни одному из направлений нельзя отдать предпочтение.
Чтобы найти силу в произвольной точке, разобьем шар на тонкие концентрические слои.

Можно доказать, что сила, действующая со стороны внешних слоев равна нулю. Это видно из рисунка - массы участков обратно пропорциональны квадрату расстояния до данной точки.

Таким образом, сила притяжения действует только со стороны той части Земли, которая находится ближе к центру.

Тогда

$$mg = \gamma \frac{mm_1}{r^2}$$

где m_1 - масса в той части Земли, которая находится ближе к центру.

$$m_1 = \rho_0 V_1 = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$$

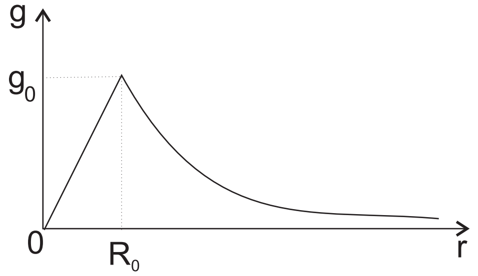
Плотность Земли можно определить зная массу всего Земного шара и его радиус:

$$\rho_0 = \frac{M_0}{V_0} = \frac{3M_0}{4\pi R_0^3}$$

Таким образом:

$$g = \gamma \frac{m_1}{r^2} = \gamma \frac{\rho_0 4\pi r^3}{3} \frac{1}{r^2} = \gamma \frac{3M_0 4\pi r^3}{4\pi R_0^3 3} \frac{1}{r^2} = \gamma \frac{M_0}{R_0^3} r$$

Внутри однородного шара ускорение свободного падения *прямо пропорционально* расстоянию до центра шара.



3. Если учитывать, то, что Земля не является шаром, а слегка сплюснута у полюсов, то ускорение свободного падения будет зависеть от географической широты.

4.6 Искусственные спутники

Рассмотрим мысленный эксперимент, предложенный Исааком Ньютона. Рассмотрим Землю без атмосферы. Будем считать, что на ней нет гор и возвышенностей и что она является идеальной сферой. Пусть на Земле есть одна гора и на ней установлена, горизонтально направленная, пушка.

Если из пушки начать стрелять ядрами и увеличивать их скорость, то вначале снаряды будут лететь по параболе, но в итоге при некоторой скорости, снаряд совершит оборот вокруг земли и попадет в пушку с обратной стороны. Это мысленный эксперимент называется опытом с горкой или пушкой Ньютона.

Def. Минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно не упало, а совершило хотя бы один оборот вокруг планеты по круговой орбите на нулевой высоте, называется первой космической скоростью.

В процессе движения, на спутник действует только одна сила - сила тяжести. Т.е. спутник все время находится в состоянии невесомости.

Сила тяжести, вблизи поверхности Земли, сообщает телу ускорение свободного падения.

Запишем II закон Ньютона для спутника, если бы он обращался вокруг Земли на нулевой высоте:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$"x" : F = ma = m\tfrac{v^2}{R_0}$$

Из закона всемирного тяготения следует, что

$$F = \gamma \frac{mM}{R_0^2}$$

$$\gamma M = g_0 R_0^2$$

Следовательно

$$g_0 = \frac{v^2}{R_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_I = \sqrt{g_0 R_0}}$$

Для Земли

$$v_I = \sqrt{9,8\text{м/с}^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6\text{м}} = 7919\text{м}/c = 7,9\text{км}/c$$

Первый в истории человечества спутник был запущен в Советском Союзе в 4 октября 1957 года.

Если сообщить телу скорость несколько больше первой космической, то тело будет двигаться по эллипсу, в одном из фокусов которого будет находится Земля. Чем больше скорость, тем более вытянутым получается эллипс. Наконец при некоторой скорости (11,2 км/с) траектория станет незамкнутой - тело уйдет в межпланетное пространство и станет спутником солнца. Эту скорость называют *второй космической скоростью.*

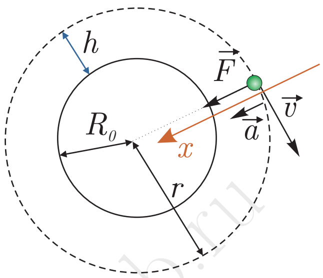
Пример 1 Найти линейную скорость и период обращения искусственного спутника Земли, если высота его орбиты равна радиусу Земли - 6400 км.

Дано:
$h = R_0 = 6400$ км
$g = 9,8$ м/с^2
$v, T-?$

В данной задаче орбиту спутника будем считать круговой, а Землю однородным шаром. В качестве тела отсчета возьмем Землю - ИСО.

Радиус орбиты будет равен

$$\boxed{r = R_0 + h}$$



Запишем второй закон Ньютона для спутника и закон всемирного тяготения для спутника и Земли:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$"x" : F = ma = m\frac{v^2}{r}$$
$$F = \gamma\frac{mM}{r^2}$$

Приравняв силы из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения получим:

$$\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = \gamma\frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$$

Поскольку масса Земли в подобных задачах считается неизвестной, воспользуемся тем, что

$$\boxed{\gamma M = gR_0^2}$$

тогда

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{gR_0^2}{r}} = \sqrt{\frac{gR_0^2}{R_0 + h}} = \sqrt{\frac{gR_0^{\cancel{2}}}{2\cancel{R_0}}} = \sqrt{\frac{gR_0}{2}} = \sqrt{\frac{9,8\ \text{м/с}^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6\ \text{м}}{2}} = 5,6\ \text{км/с}$$

Зная скорость спутника, можно найти период его обращения вокруг Земли:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi 2R_0}{v} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 6,4 \cdot 10^6\ \cancel{м}}{5,6 \cdot 10^3\ \cancel{м}/\text{с}} = 14\ 354\ \text{с} = 3,9\ \text{ч}$$

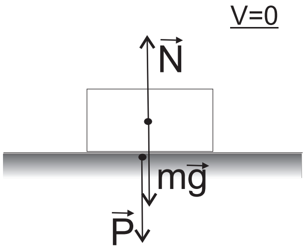
Ответ: $v = 5,6$ *км/с*; $T = 14\ 354$ *с*;

4.7 Вес тела. Невесомость. Перегрузки.

4.7.1 Вес тела.

Def. Сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес, называется весом тела.

Рассмотрим тело в состоянии покоя на горизонтальной поверхности. На тело действует сила притяжения Земли и сила нормальной реакции опоры.



Вследствие притяжения к Земле, тело давит на поверхность с силой называемой весом тела, в результате чего поверхность реагирует с силой нормальной реакции опоры. Вес тела и сила нормальной реакции равны по величине и противоположены по направлению, вследствие III закона Ньютона. Эти две силы являются результатом взаимодействия тела и поверхности.

Из II закона Ньютона для тела следует:

$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$$

Из III закона Ньютона :

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

После проецирования получим:

$$\boxed{P = N = mg}$$

Поскольку вес является силой, единицей его измерения является Ньютон.

$$[P] = H$$

Вес тела и сила тяжести приложены к разным телам. NB!

Вес возникает в результате притяжения к Земле, но он *может отличаться от силы притяжения Земли.* Это возможно в тех случаях, когда кроме Земли и подвеса на тело действуют какие-либо другие тела. Рассмотрим несколько случаев, когда вес тела по величине совпадает и отличается от силы тяжести.

Предположим, что в лифте лежит тело массой m. Рассмотрим чему будет равен вес этого тела.

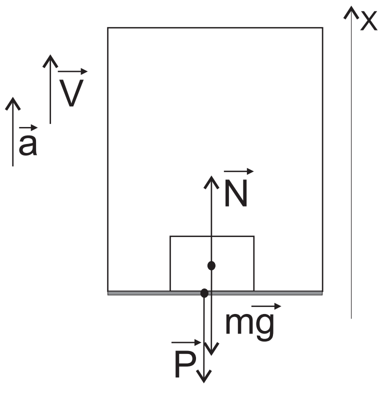
- Лифт равномерно поднимается

  В этом случае можно полностью повторить предыдущий вывод и получить следующее соотношение

$$\boxed{P = mg}$$

St. ➜ ***Если тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, то вес тела по величине совпадает с силой тяжести.***

- Лифт равноускоренно поднимается



II закон Ньютона:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Проекция:

$$N - mg = ma \qquad \Rightarrow \qquad N = m(g + a)$$

III закон Ньютона:

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

Проекция:

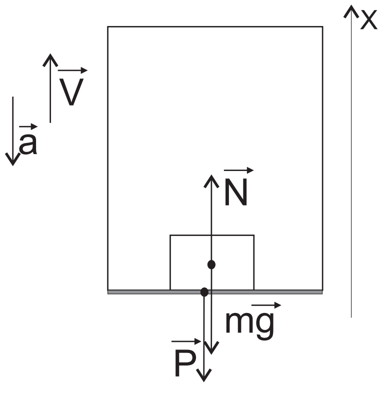
$$N = P$$

Вес тела в этом случае будет равен

$$\boxed{P = m(g + a)}$$

т.е. тело станет тяжелее на величину, равную ma.

- Лифт поднимается равнозамедленно



II закон Ньютона:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Проекция:

$$N - mg = -ma \qquad \Rightarrow \qquad N = m(g - a)$$

III закон Ньютона:

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

Проекция:

$$N = P$$

Вес тела в этом случае будет равен

$$\boxed{P = m(g - a)}$$

т.е. тело станет легче на величину, равную ma

- Если в последнем случае $a = g$, т.е. лифт движется с ускорением свободного падения, то в этом случае вес тела равен нулю. Состояние, в котором будет находиться тело в этом случае, принято называть невесомостью.

4.7.2 Невесомость. Перегрузки.

Обратим внимание, что в последнем случае мы получили нулевой вес, в этом случае на тело будет действовать только сила тяжести (т.к. $P = N = 0$).

Def. Состояние, в котором на тело действует только сила тяжести, называется невесомостью.

Это состояние обладает характерной особенностью: в состоянии невесомости тело не деформировано. Т.к. в этом случае на тело действует только сила тяжести, которая сообщает всем частям тела одинаковое ускорение.

Чтобы продемонстрировать невесомость, достаточно отпустить тело в свободное падение. Если пренебречь сопротивлением воздуха, можно считать, что на тело действует только сила тяжести, т.е. оно находится в состоянии невесомости. NB!

Def. Перегрузкой называется отношение величины веса тела к величине силы тяжести.

$$k = \frac{P}{mg}$$

Перегрузки присутствуют в случае, когда тело начинает двигаться с ускорением, которое оно приобретает не под действием силы тяжести, а под воздействием какой-либо другой силы.

Пример 1 С какой скоростью автомобиль должен проходить середину выпуклого моста радиусом 40 м, чтобы пассажир на мгновение оказался в состоянии невесомости?

Дано:
$R = 40$ м
$v-?$

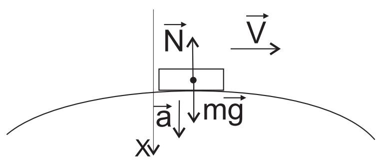
II закон Ньютона:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n$$

Проекция: $-N + mg = ma_n \quad \Rightarrow \quad a_n = g - \frac{N}{m}$

Центростремительное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$



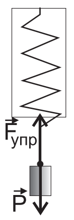
Состояние невесомости соответствует $N = P = 0$, следовательно

$$g = a_n = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR} = 20 \text{ м/с}$$

Ответ: $v = \sqrt{gR} = 20$ *м/с*

4.7.3 Взвешивание тел.

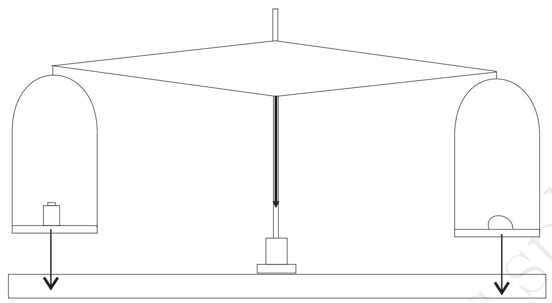
Пружинные весы



В пружинных весах для измерения веса тела используется тот факт, что при деформации пружины в ней возникает сила упругости.
Пружина будет растягиваться до тех пор, пока сила упругости пружины не станет равна весу тела, который приложен к концу пружины. Тогда, для покоящегося тела сила упругости будет по величине равна весу тела.

Рычажные весы

Кроме взвешивания тела на пружинных весах, можно применить другой способ взвешивания. Он состоит в непосредственном сравнении веса гирь и веса тела на равноплечном рычаге.



Равноплечный рычаг оказывается в равновесии, если на оба его конца действуют одинаковые силы.
Рычажные весы позволяют взвешивать тела с гораздо большей точностью, чем обычные пружинные весы. Наиболее точные рычажные весы позволяют производить взвешивание с точностью до 10^{-8} измеряемой величины.

5 Применение законов динамики

5.1 Введение

В данной главе будут рассмотрены примеры использования законов динамики в задачах, где силы, действующие на тело, не перпендикулярны друг другу или движение происходит не по прямой (например по параболе).

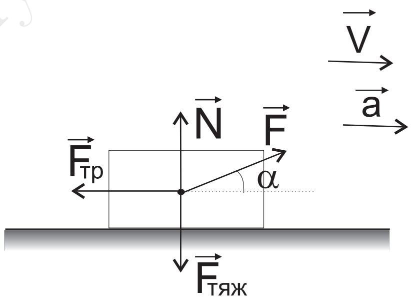
Порядок расположения тем соответствует увеличению уровня сложности. В начале рассматривается движение тела по наклонной плоскости и движение по прямой под действием силы, направленной под углом, к направлению движения. Затем будет рассмотрено движение тела под действием силы тяжести, в случае когда начальная скорость тела направлена не вертикально, т.е. под углом к горизонту.

Далее будет рассмотрена динамика движения связанных тел, в которую войдет в частности и движение по наклонной плоскости. Последняя группа задач посвящена динамике движения тел по окружности, а также динамике движения на поворотах.

5.2 Движение по действием сил, неперпендикулярных друг другу

5.2.1 Движение по прямой, под действием силы, направленной под углом к направлению движения

Определите силу, которую необходимо прикладывать к телу массой m под углом α, чтобы оно двигалось равноускоренно и прямолинейно с ускорением a. Коэффициент трения о плоскость равен μ.



Запишем II-ой закон Ньютона:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Проекции на координатные оси:

$$\begin{aligned} "x" &: F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = ma \\ "y" &: N + F\sin\alpha - mg = 0 \end{aligned}$$

Формула для силы трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$$

Таким образом:

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma$$

$$\boxed{F = \frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}$$

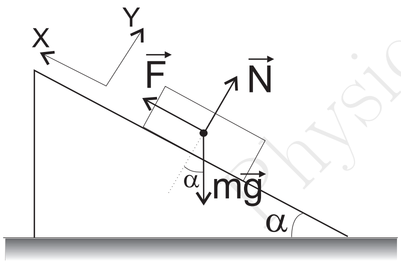
Видно, что в данном случае сила будет зависеть от массы тела, угла наклона плоскости, коэффициента трения и величины того ускорения, которое должна сообщить данная сила.

5.2.2 Динамика движения по наклонной плоскости.

Рассмотрим две наклонные плоскости, одну идеальную, а другую нет. Пусть нам будет известна масса тела m, угол наклона плоскости α к горизонту и для неидеальной плоскости коэффициент трения μ.

Идеальная плоскость

1. Найдем силу необходимую для удержания тела в состоянии покоя



$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$$

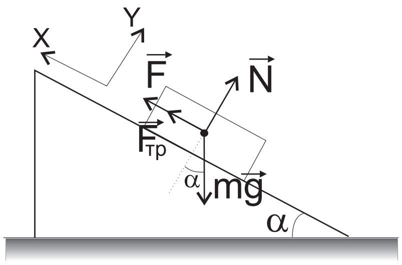
$$"x" : F - mg\sin\alpha = 0$$
$$"y" : N - mg\cos\alpha = 0$$

Таким образом

$$\boxed{F = mg\sin\alpha}$$

Плоскость с трением

1. Найдем силу необходимую для удержания тела в состоянии покоя



$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$$

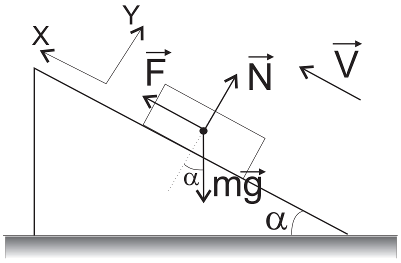
$$"x" : F + F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = 0$$
$$"y" : N - mg\cos\alpha = 0$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$
Таким образом

$$\boxed{F = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

Таким образом, на плоскости с трением удерживать тело проще, т.к. в этом случае помогает сила трения.

2. Найдем силу, необходимую для равномерного подъема тела



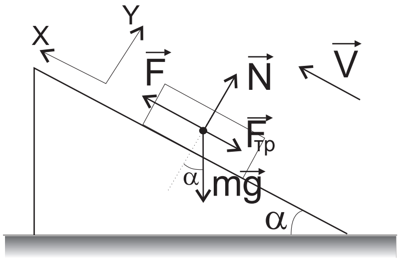
$$\vec{F}+\vec{N}+m\vec{g}=\vec{0}$$

$$"x": F-mg\sin\alpha=0$$
$$"y": N-mg\cos\alpha=0$$

Таким образом

$$\boxed{F=mg\sin\alpha}$$

2. Найдем силу, необходимую для равномерного подъема тела



$$\vec{F}+\vec{F}_{тр}+\vec{N}+m\vec{g}=\vec{0}$$

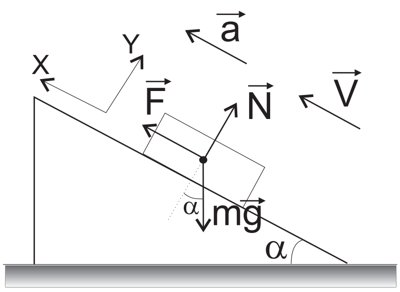
$$"x": F-F_{тр}-mg\sin\alpha=0$$
$$"y": N-mg\cos\alpha=0$$

Сила трения $F_{тр}=\mu N=\mu mg\cos\alpha$
Таким образом

$$\boxed{F=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$$

В случае идеальной плоскости сила останется той же, а для неидеальной плоскости увеличится, т.к. в этом случае трение будет мешать подъему.

3. Найдем силу, необходимую для равноускоренного подъема тела



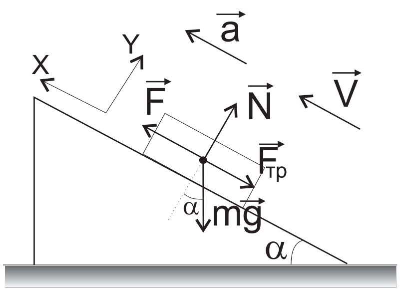
$$\vec{F}+\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}$$

$$"x": F-mg\sin\alpha=ma$$
$$"y": N-mg\cos\alpha=0$$

Таким образом

$$\boxed{F=m(a+g\sin\alpha)}$$

3. Найдем силу, необходимую для равноускоренного подъема тела



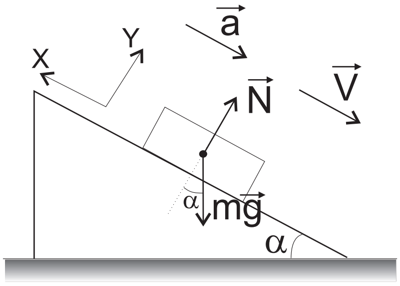
$$\vec{F}+\vec{F}_{тр}+\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}$$

$$"x": F-F_{тр}-mg\sin\alpha=ma$$
$$"y": N-mg\cos\alpha=0$$

Сила трения $F_{тр}=\mu N=\mu mg\cos\alpha$
Таким образом

$$\boxed{F=m(a+g\sin\alpha+\mu g\cos\alpha)}$$

4. Рассмотрим случай, когда сила $F = 0$ В этом случае тело будет соскальзывать по идеальной плоскости.



$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

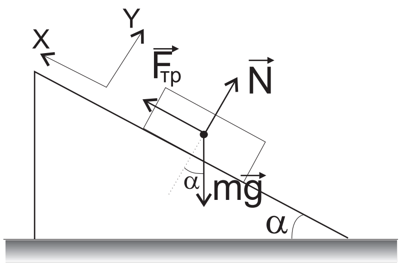
$$"x" : mg\sin\alpha = ma$$
$$"y" : N - mg\cos\alpha = 0$$

Таким образом

$$\boxed{a = g\sin\alpha}$$

При свободном скольжении ускорение тела не зависит от массы тела.

4. Рассмотрим случай, когда сила $F = 0$ Рассмотрим, такой максимальный угол наклона, при котором тело еще будет находится в состоянии покоя.



$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$"x" : F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = 0$$
$$"y" : N - mg\cos\alpha = 0$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$

$$0 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Таким образом

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \mu}$$

Def. Предельным углом называется такой максимальный угол, при котором тело на наклонной плоскости еще остается в состоянии покоя.

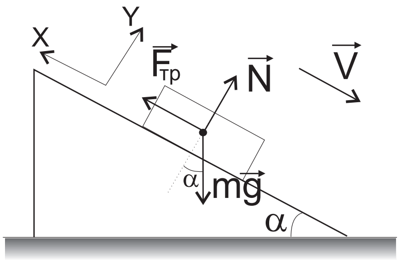
St. *Тангенс предельного угла наклона плоскости численно равен коэффициенту трения*

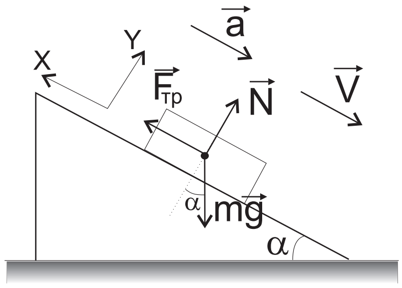
Мы рассмотрели основные случаи движения по наклонной плоскости. Аналогичные рассуждения можно было бы провести для движения тела вниз по наклонной плоскости.

Последнее свойство для неидеальной плоскости очень часто используется для определения значения коэффициента трения, т.к. в этом случае не требуется перемещать тело с постоянной скоростью. Погрешность в таком способе измерения будет значительно меньше.

Пример: Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 4°. Требуется определить: а) при каком предельном значении коэффициента трения μ тело начнет скользить по наклонной плоскости? б) с каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения равен 0,03? в) время t прохождения при этих условиях 100 м пути г) скорость тела v в конце этого пути

Решение:





а)

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} = \vec{0}$$

$$"x" : F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = 0$$
$$"y" : N - mg\cos\alpha = 0$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

Таким образом

$$\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \operatorname{tg}\alpha = 0,069 \approx 0,07}$$

б) Если коэффициент трения будет равен 0,03 то тело начнет двигаться с ускорением. Тогда

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}$$

$$"x" : -F_{\text{тр}} + mg\sin\alpha = ma$$
$$"y" : N - mg\cos\alpha = 0$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

Тогда

$$\boxed{a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0,39\text{м}/c^2}$$

в,г) Для определения времени и скорости необходимо воспользоваться уравнениями равнопеременного движения:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$"x" : S = x - x_0 = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = 22,6c}$$

$$"y" : \boxed{v = at = \sqrt{2Sa} = 8,83\text{м}/c}$$

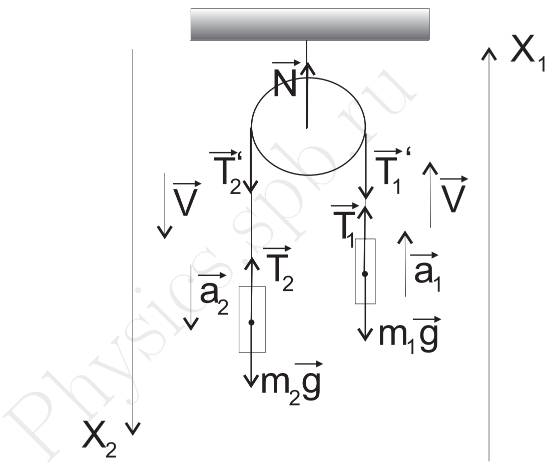
5.3 Движение системы связанных тел

Часто мы сталкиваемся не с одним телом, а системой тел. Первый раз мы столкнулись с системой тел в III законе Ньютона. Мы выяснили, что система не может сдвинуться с места под действием только внутренних сил, для этого необходимо наличие внешней силы. К внутренним относят сил, действующие между телами входящими в систему тел. Если сила действует со стороны тела, не входящего в систему, то такую силу относят к внешней силе.

В задачах на динамику движения системы связанных тел потребуются все три закона Ньютона. Особенностью решения таких задач является то, что количество векторных уравнений движения должно совпадать с числом тел, входящих в систему связанных тел.

Рассмотрим следующие примеры:

Пример I На невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены тела, массой m_1 и m_2 $(m_1 < m_2)$. Найти ускорение каждого тела, силу натяжения нити, силу упругости, возникающую в оси блока.



Решение:

Выберем для каждого тела свою систему координат. Координатные оси направим по ускорениям тел.

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$$
$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$$

Спроецируем эти уравнения на координатные оси:

$$"x_1" : -m_1 g + T_1 = m_1 a_1$$
$$"x_2" : m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

Но неизвестных в этих уравнениях больше, чем самих уравнений, т.е. данную систему не решить. Но нам известна некоторая информация о нити:

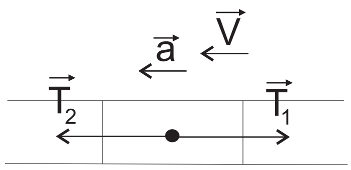
- Нить не растяжима

  Если нить не растяжима, значит она не деформирована, т.е.все части нити движутся одинаково, как единое целое, следовательно все части нити движутся с одинаковым ускорением, а, следовательно, и тела движутся с одинаковым ускорением

$$\boxed{a_1 = a_2 = a}$$

St. *Если части системы соединены нерастяжимой нитью, то эти части будут двигаться с одинаковым ускорением*

- Нить невесома



Выделим произвольный участок нити массой Δm. На него действуют две силы $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$. Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{T}_1' + \vec{T}_2' = \Delta m \vec{a}$$

Поскольку нить невесома $\Delta m \to 0$, следовательно

$$\boxed{T_1' = T_2' = T}$$

St. *Если нить невесома, то натяжение нити по всей длине одинаково.*

Из III закона Ньютона:

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_2' \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T$$

Отсюда, решая систему, находим

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g}$$

$$\boxed{T = m_1(g + a)}$$

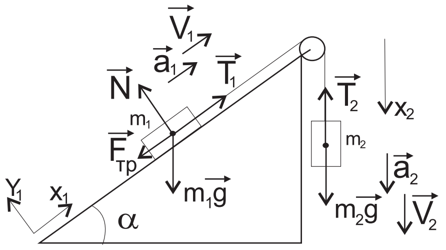
Чтобы найти силу упругости в оси блока, надо записать второй закон Ньютона для блока:

$$\vec{N} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2' = \vec{0}$$

Отсюда, после проецирования, получим:

$$\boxed{N = 2T}$$

Пример II Два тела массой m_1 и m_2 соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, закрепленный на вершине наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Найти ускорение каждого тела, если трение есть только между плоскостью и первым телом, коэффициент трения равен μ и тело массой m_2 движется вниз.



Решение:
Запишем второй закон Ньютона для каждого тела

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$$
$$m_1\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$$

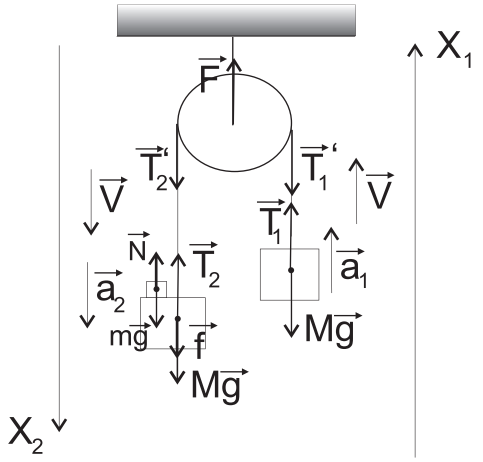
Поскольку нить нерастяжима $a_1 = a_2 = a$, и поскольку невесома $T_1 = T_2 = T$, тогда после проецирования получим

$$\begin{aligned} "x_2": &\quad m_2 g - T = m_2 a \\ "x": &\quad T - \mu N - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \\ "y": &\quad N - m_1 g \cos\alpha = 0 \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно ускорения, получим

$$\boxed{a = g\frac{m_2 - m_1(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2}}$$

Пример III Гольдфарб(2.11) Два одинаковых груза массой M подвешены на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок. На один из них положен грузик массой m. Определить силу f давления грузаика на груз M и силу F, действующую на ось блока.



Решение: Запишем второй закон Ньютона для всех тел, включая блок:

$$\vec{T}_1 + M\vec{g} = M\vec{a}_1$$
$$\vec{T}_2 + M\vec{g} + \vec{f} = M\vec{a}_2$$
$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_2$$
$$\vec{F} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2' = \vec{0}$$

Т.к. нить нерастяжима $a_1 = a_2 = a$
Т.к. нить невесома $T_1 = T_2 = T_1' = T_2' = T$

Спроецируем эти уравнения на координатные оси:

$$
\begin{aligned}
"x_1" &: T - Mg = Ma \\
"x_2" &: Mg + f - T = Ma \\
"x_2" &: mg - N = ma \\
"x_1" &: F - 2T = 0
\end{aligned}
$$

По III закону Ньютона, сила? с которой перегрузок действует на груз, равна силе, с которой груз действует на перегрузок

$$N = f$$

Тогда решая систему относительно f, найдем

$$\boxed{f = \frac{2mM}{m+2M}g}$$

Аналогично можно определить силу действующую на ось блока

$$\boxed{f = 4Mg\frac{m+M}{m+2M}g}$$

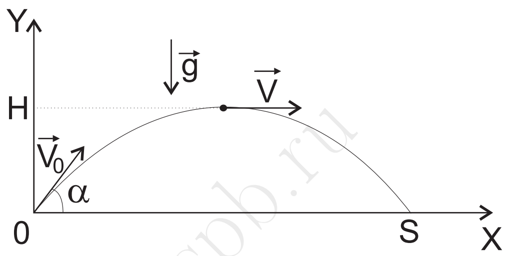
5.4 Движение под действием силы тяжести

Будем рассматривать движение тела вблизи поверхности Земли, в области линейные размеры которой много меньше радиуса Земли. В этом случае можно пренебрегать изменением величины и направления ускорения свободного падения.

Таким образом, можно считать, что тело движется с постоянным ускорением, при условии, что на тело не действуют никакие другие силы, например, силы трения о воздух.

5.4.1 Уравнение траектории.

Т.к. ускорение постоянно, то траектория движения будет лежать в вертикальной плоскости. Введем в этой плоскости систему координат следующим образом: ось x направим горизонтально, а ось y вертикально вверх.



Нам известен угол α - угол между направлением начальной скорости и осью x и известна величина начальной скорости v_0.

Запишем векторные уравнения для равноускоренного движения:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Спроецируем уравнение координаты на ось x и ось y:

$$"x": \quad x = x_0 + v_0 t \cos\alpha$$
$$"y": \quad y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \tfrac{gt^2}{2}$$

Обычно бывает удобно выбрать систему координат так, чтобы ее начало совпадало с исходной точкой траектории, тогда $x_0 = 0; \quad y_0 = 0$.

Чтобы получить уравнение траектории $y = y(x)$, нужно исключить время их этих уравнений. Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе получим

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

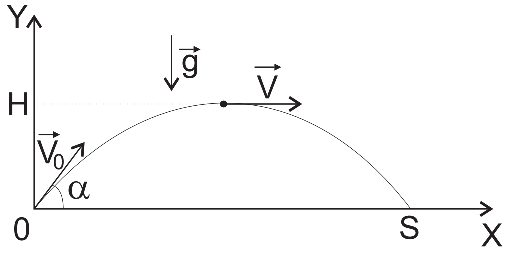
$$\boxed{y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2}$$

Это уравнение параболы, проходящей через начало координат. Ее ветви направлены вниз, т.к. коэффициент при x^2 отрицателен.

5.4.2 Общая задача

Решим следующую задачу в общем виде: тело бросают под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Определить дальность полета S, высоту подъема H, время подъема $t_{\text{под}}$, время спуска $t_{\text{сп}}$, полное время полета $t_{\text{п}}$, скорость в момент падения.

Решение:



Систему отсчета связываем с Землей, начало координат помещаем в точку бросания.

Решение задачи начинаем с записи векторных уравнений равнопеременного движения:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Движение под действием силы тяжести характерно тем, что по горизонтали тело движется равномерно, а по вертикали равнопеременно, т.к. горизонтальная составляющая скорости не меняется, поскольку сила тяжести сообщающая телу ускорение, направлена по вертикали.

Спроецируем векторные уравнения на координатные оси:

$$"x" : x = v_0 t \cos\alpha \qquad\qquad "x" : v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$"y" : y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \qquad\qquad "y" : v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

Полное время полета:

Момент падения тела соответствует $y = 0$. Тогда

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{полн}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$$

Решение $t = 0$ соответствует точке бросания, следовательно, это решение не может быть полным временем.

Дальность полета:

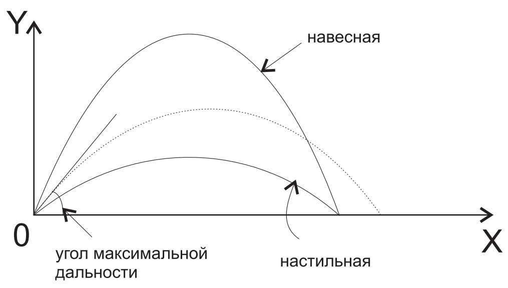
$$S_{\max} = v_0 \cos\alpha t_{\text{полн}} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

При заданной начальной скорости v_0 дальность полета будет иметь максимальное значение при $\sin 2\alpha = 1$

$$2\alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$$

При данной начальной скорости дальность полета будет одна и таже при угле бросания α и $90° - \alpha$, т.к.

$$\sin 2\alpha = \sin(180° - 2\alpha) = \sin(2(90° - \alpha))$$



Время подъема:

В верхней точке траектории $v_y = 0$, т.к. скорость направлена по касательной и верхняя точка является вершиной параболы.

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt_{\text{под}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{под}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

Время подъема по параболе равно половине полного времени полета, т.е. время подъема равно времени падения.

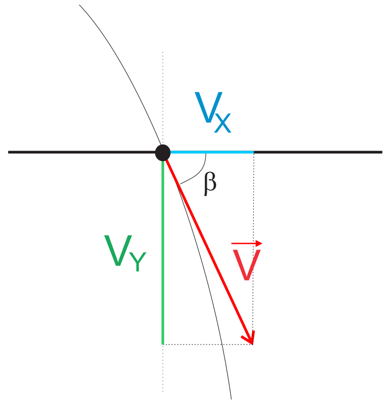
Высота подъема:

$$H_{max} = v_0 \sin\alpha t_{\text{под}} - \frac{gt_{\text{под}}^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{gv_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\boxed{H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

Высота подъема зависит от начальной скорости и начального угла.

Скорость в момент падения:



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt_{\text{полн}}$$
$$t_{\text{полн}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - \frac{g 2 v_0 \sin\alpha}{g} = -v_0 \sin\alpha$$

Минус означает, что проекция скорости на ось y отрицательна, что полностью соответствует данной задаче.

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (-v_0 \sin\alpha)^2} = \sqrt{v_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = v_0$$

$$\boxed{v_{\text{кон}} = v_0}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

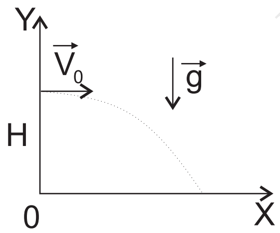
Поскольку $0 < \alpha < 90°$, то

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

Скорость при падении численно равна начальной скорости. Угол падения равен углу бросания

5.4.3 Примеры задач

Пример I Тело бросают с высоты H параллельно горизонту со скоростью v_0. Определить время и дальность полета.



Векторные уравнения:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Проекции:

$$\text{"}x\text{"} : x = v_0 t \qquad \text{"}x\text{"} : v_x = v_0$$
$$\text{"}y\text{"} : y = H - \frac{gt^2}{2} \qquad \text{"}y\text{"} : v_y = -gt$$

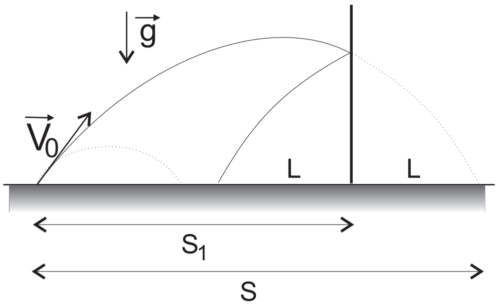
Сначала найдем время полета:

$$y = 0 = H - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

Зная время, найдем дальность полета:

$$\boxed{S = x = v_0 \cdot t = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

Пример II Тело бросают с Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. На расстоянии S_1 от точки бросания находится стена. Определите, как далеко от стены упадет тело?



Решение: Запишем векторные уравнения:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Спроецируем уравнения на координатные оси:

$$"x" : x = v_0 \cos\alpha t \qquad "x" : v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$"y" : y = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \qquad "y" : v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

В данной задаче возможны два решения, первое соответствует случаю, когда тело не долетает до стены, а второе когда долетает и упруго отскакивает.

Рассмотрим первый случай:

Дальность полета будет равна

$$S = v_0 \cos\alpha t_{\text{полн}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Расстояние от стены, на котором упадет тело, будет равно

$$L = S_1 - S = S_1 - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Первый случай будет выполняться, если последнее выражение больше или равно нулю. Случай равенства нулю, будет соответствовать случаю, когда тело упадет у основания стены.

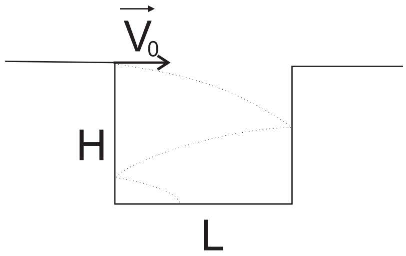
Рассмотрим второй случай.

В момент удара, если считать его упругим, меняется только v_x составляющая скорость, при этом v_y остается тем же. Поэтому можно рассматривать движение с отражением аналогом движения без стены.

Тогда

$$L = S - S_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - S_1$$

Пример III Тело бросают горизонтально со скоростью v_0 с угла ямы глубиной H и шириной L. Определите сколько раз тело упруго ударится о стенки прежде чем упадет на дно ямы.



Решение: Поскольку при ударах о стенку меняется знак только у проекции v_x, то число ударов будет равно наименьшему целому от следующего частного:

$$n = \frac{S}{L}$$

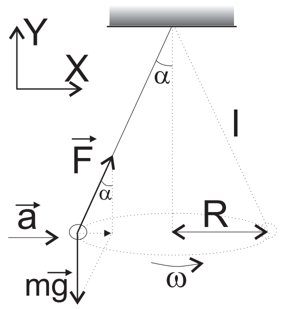
где S - дальность полета тела брошенного с высоты равной H. При этом возможен случай когда тело ни разу не ударится о стенку, т.к. начальная скорость очень мала.

5.5 Динамика движения по окружности

Рассмотрим движение тел по окружности, такие как движение в вертикальной плоскости с постоянной скоростью и движение на поворотах, как по горизонтальной, так и по наклонной дороге.

5.5.1 Конический маятник

Шарик массой m, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити длиной l, движется по окружности в горизонтальной плоскости так, что нить описывает коническую поверхность, образуя все время угол α с вертикалью. Определить период вращения и силу натяжения нити.



Решение: Запишем второй закон Ньютона для шарика:

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Спроецируем на координатные оси:

$$\begin{aligned} "x": &\quad F\sin\alpha = ma \\ "y": &\quad F\cos\alpha - mg = 0 \end{aligned}$$

Найдем силу натяжения нити из проекции на ось y:

$$\boxed{F = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

Тело движется по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 l\sin\alpha}{T^2}$$

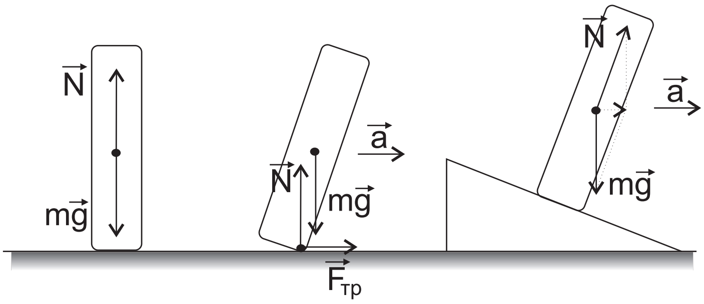
Отсюда используя выражение для силы натяжения нити и проекцию на ось x найдем период

$$g\,\mathrm{tg}\,\alpha = a \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}}$$

5.5.2 Движение на поворотах

Треки для велосипедных и мотоциклетных гонок в местах поворота делают не горизонтальными, а наклонными. Для чего? Рассмотрим колесо, которое катится прямо.

Для того, чтобы оно сделало поворот, надо, чтобы на колесо стала действовать сила, направленная в сторону поворота. Если колесо стоит прямо, такой силы не возникает, но если колесо наклонить, возникает сил трения, мешающая проскальзыванию.

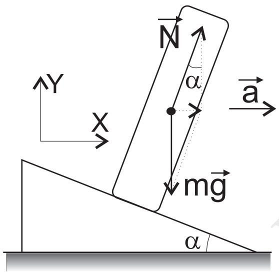


Эта сила создаст центростремительное ускорение, и колесо начнет поворачиваться. Чтобы совершить поворот на большой скорости, требуется большая сила, и может случиться так, что трение будет мало и мотоциклист либо не впишется в поворот, либо упадет.

Можно сделать так, чтобы нужная горизонтальная сила возникла без всякого участия силы трения. Для этого дорогу надо сделать наклонной.

Угол наклона можно подобрать так, чтобы равнодействующая силы тяжести и силы нормальной реакции опоры была направлена горизонтально и точно равнялась необходимой силе.

Пример I На какую максимальную скорость рассчитан велосипедный трек с наклоном α к горизонту и радиусом закругления R



Решение: Запишем второй закон Ньютона для велосипедист:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Спроецируем на координатные оси:

$$\begin{aligned} "x": \quad & N\sin\alpha = ma \\ "y": \quad & N\cos\alpha - mg = 0 \end{aligned}$$

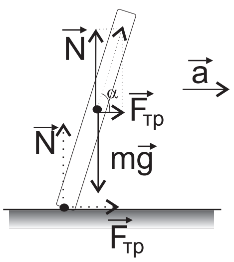
Тело движется по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Отсюда получаем

$$mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$$

Пример II Мотоциклист движется по окружности радиусом R. Коэффициент трения колес о дорогу равен μ Под каким углом к горизонту он должен наклониться, чтобы сохранить равновесие? С какой максимальной скоростью он сможет проехать поворот?



Решение: Запишем второй закон Ньютона для велосипедист:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}$$

Равнодействующая двух сил: силы трения и силы нормальной реакции опоры, должна пройти по линии, соединяющей центр масс мотоциклиста и точку соприкосновения колес с дорогой.

Только в этом случае мотоциклист останется в равновесии. Более подробно данный вопрос будет рассмотрен в *статике*.

Спроецируем на координатные оси:

$$\begin{aligned} "x": &\quad F_{\text{тр}} = ma \\ "y": &\quad N - mg = 0 \end{aligned}$$

Сила трения определяется формулой $F_{\text{тр}} = \mu N$

Таким образом

$$\mu mg = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\mu g R}}$$

Угол наклона при условии равновесия, как уже было сказано, будет определяться следующим соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{N}{F_{\text{тр}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\mu}}$$