И.А. Соловейчик

ФИЗИКА
МЕХАНИКА

Пособие для абитуриентов и старшеклассников

Агентство
ИГРЕК

Санкт-Петербург
2006

ББК 22.3:я 72
С 60

Соловейчик И.А.

С 60 Физика. Механика: Пособие для абитуриентов и старшеклассников — СПб.: «Агентство ИГРЕК», 2006. — 192 с.

ISBN 5-85849-029-8

Учебное пособие представляет собой законченный курс по основам классической физики в объеме программы общеобразовательной школы. Стиль пособия отличает предельная ясность изложения материала, сочетающаяся с логической стройностью и полнотой, что позволяет рекомендовать пособие весьма широкому кругу читателей с различным уровнем подготовки по физике и математике.

Пособие издается в трех книгах. Первая из них посвящена изложению механики в объеме программы девятого класса средней школы.

Предназначена для преподавателей и учащихся старших классов общеобразовательных и физико-математических школ.

ББК 22.3:я 72

ISBN 5-85849-029-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой настоящего пособия послужил учебник физики для старших классов средней школы, написанный выдающимся педагогом и замечательным человеком Иосифом Абрамовичем Соловейчиком. Учебник представлялся на конкурсы, был премирован и рекомендован к печати, но по ряду причин только теперь впервые выходит в свет значительным тиражом.

Конечно, печатный текст лишь в ограниченной мере может передать необычайное обаяние личности И. А. Соловейчика, но присущая ему своеобразная манера изложения — на первый взгляд несколько наивная и простодушная, а на самом деле чрезвычайно строгая и кристально ясная — полностью сохранилась в публикуемом пособии.

Одно из его громадных достоинств — безукоризненная логическая и терминологическая строгость, отсутствие недомолвок и расплывчатых туманных описаний, отточенность и выверенность всех формулировок, четко расставленные акценты на главном и второстепенном. Трудные места не "замазываются", а специально рельефно выделяются, и, что быть может еще важнее, не создаются искусственные трудности там, где их на самом деле нет. Автор, человек глубокой культуры и эрудиции, обладал удивительным и редким педагогическим даром — умением поставить себя на место ученика, впервые постигающего чудеса и премудрости науки. Думается, именно это позволило ему обойти бесчисленное множество подводных камней, которые делают написание хороших учебников физики для старших классов школы и первых курсов вуза неимоверно сложным делом.

Абитуриенты и студенты младших курсов, готовясь к экзаменам, часто не учитывают следующего обстоятельства. Их экзаменаторы обычно лишь приблизительно знают границы рамок школьного курса физики, а наличие или отсутствие в нем мелких деталей и подробностей вообще представляют себе достаточно туманно. В результате нередко масса времени и труда, затраченные на зазубривание какого-то сложного и хитроумного примера, пропадают зря — с точки зрения экзаменатора это оказывается второстепенным обстоятельством. В то же время место, по которому ученик лишь скользнул взглядом и пропустил ввиду кажущейся простоты и очевидности, является совершенно принципиальным, требует детальных комментариев, точности и аккуратности в употреблении слов и ведет к таким следствиям, о которых не очень внимательный читатель даже и не подумал.

С этой точки зрения особенно важно, как для дальнейшего изучения физики, так и для успешной сдачи экзаменов, не только и не столько механическое запоминание формул или определений, сколько овладение кругом идей и стилем мышления физики.

Учебник И. А. Соловейчика удивителен и уникален в этом отношении. Каким-то непостижимым образом автору удается с самых первых страниц передать и привить читателю именно дух и стиль физического, и вообще естественнонаучного, подхода к окружающему миру.

Одна из главных особенностей учебника — это постоянное обращение автора к элементарному здравому смыслу читателя. Как показывает опыт, многие школьники и абитуриенты воспринимают физику как нечто "заумное" и не очень-то связанное с реальностью. За шелухой громоздких математических формул, хитроумных экспериментов и сложных словесных определений просто теряется из виду, что физика — это наука об окружающем нас мире.

И еще одна общая характерная черта естественнонаучного стиля мышления, которая пронизывает весь учебник, — изучение закономерностей, существующих в природе, всегда требует какой-то степени идеализации. Умение сосредоточиться на существенном, отбросив до времени остальное — это признак высокого профессионализма. Необходимость же всякий раз аккуратно оговорить и держать в голове, чем именно пренебрегается и где поэтому лежат пределы справедливости данного рассмотрения, — признак общей культуры. Учебник не пренебрегает ни одной возможностью последовательно прививать читателю эту общую культуру мышления.

Наконец, учебник написан очень хорошим и совершенно "не казенным" русским языком. Данный учебник просто приятно читать, и, кроме того, он исподволь учит читателя умению внятно, четко и совершенно неформально излагать свои мысли — умению, которое высоко ценится во всех сферах человеческой деятельности.

***А. А. Самарцев**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича*

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Задачи механики

1. Механическим движением называется изменение с течением времени расстояний между телами или между частями тел. Примерами механического движения являются движение человека, автомашины, самолета, спутника, Луны и планет, движение брошенного камня, движение стрелки часов, движение воды в реках, движение воздуха (ветер) и т. д. Примерами немеханического движения являются электрический ток, распространение радиоволн и света, испарение жидкости, намагничивание железа, горение, развитие организма, процесс мышления.

Механика изучает механическое движение. Ее основная задача — зная положение тел в начальный момент, определить их положение в любой будущий момент. Выяснение условий равновесия тел также входит в задачи механики.

Механику подразделяют на кинематику, динамику и статику. Кинематика описывает разные движения, но не рассматривает причин, от которых зависит характер движения. Динамика рассматривает причины, обусловливающие то или иное движение. Частным случаем динамики является статика. В статике рассматриваются условия равновесия тел.

§ 2. Скаляры и векторы

1. В физике различают величины скалярные и векторные. Скалярными величинами или просто скалярами называют величины, полностью характеризующиеся числовым значением и знаком. Скалярами являются температура, время, пройденный путь, глубина погружения, высота подъема, масса, работа, энергия. Векторными величинами или просто

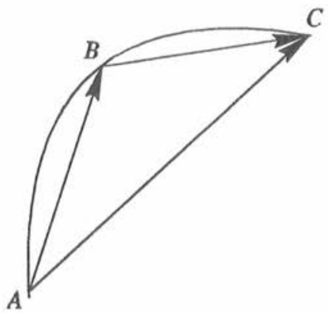


Рис. 1

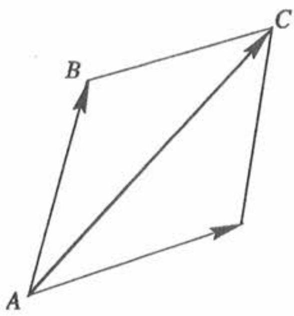


Рис. 2

векторами называют величины, характеризующиеся численным значением и направлением при условии, что эти величины складываются геометрически (т. е. по правилу параллелограмма или, что одно и то же, по правилу треугольника).

Рассмотрим такой пример. Пусть машина двигалась по криволинейному шоссе ABC (рис. 1). Если в начале некоторого промежутка времени машина была в точке A, а в конце этого промежутка — в точке B, то расстояние между этими точками называется перемещением. Перемещению приписывается определенное направление: от начальной точки к конечной (от A к B). Если за один промежуток времени перемещение машины равнялось AB, а за следующий промежуток — BC, то результирующее перемещение, как видно из рисунка, будет равно AC. Такое сложение двух величин называется геометрическим. Тот факт, что перемещения складываются геометрически, означает, что перемещение — это вектор. Иногда при геометрическом сложении векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ их откладывают из одной точки (рис. 2).

В этом случае для нахождения результирующего вектора строят не треугольник, а параллелограмм. Результат сложения векторов записывают так:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

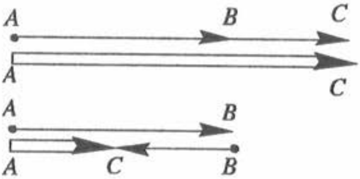


Рис. 3

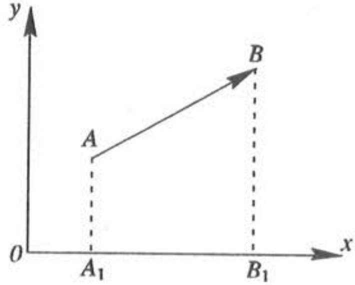


Рис. 4

В частном случае, когда угол между векторами равен 0° или 180°, треугольник (или параллелограмм) вытягивается в одну прямую линию (рис. 3).

2. Абсолютное значение векторной величины называется его модулем. Векторные величины обычно обозначают одной буквой либо жирным шрифтом (***A***, ***B***, ***C*** ... ***a***, ***b***, ***c***), либо обычными буквами, над которыми ставят стрелки ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ... $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$). Модуль вектора обозначают одним из трех способов: $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{a}|$ или $|\vec{A}|$, $|\vec{a}|$, или A, a.

3. При умножении или делении вектора на скаляр получаем, как известно из курса алгебры, тоже вектор.

4. Введем понятие о проекции вектора на заданную ось. Пусть между точками A и B расположен вектор (рис. 4). Опустим из начала A и из конца B вектора перпендикуляры на ось x. Основания перпендикуляров (точки A_1 и B_1) называются проекциями точек A и B на ось x. Длину отрезка A_1B_1, взятую со знаком "плюс" или "минус", называют проекцией вектора на ось x. Если от проекции A_1 начала вектора к проекции B_1 конца вектора надо идти по направлению оси, проекция считается положительной, в противном случае — отрицательной. Проекции вектора — величины скалярные.

Упр. 1. Начертите два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, выходящие из одной точки (их модули равны соответственно a и b). Чему равна их векторная сумма, если угол между векторами равен: а) 0°; б) 90°; в) 180°?

Упр. 2. Начертите два вектора, выходящие из одной точки. Модули их одинаковы и равны a. Чему равна векторная сумма этих двух векторов, если угол между ними равен: а) 0°; б) 90°; в) 120°; г) 180°?

Упр. 3. Модуль вектора равен a. Чему равна проекция этого вектора на ось x, если вектор: а) параллелен оси x; б) перпендикулярен оси x; в) образует с осью x угол 60°?

Упр. 4. Какой факт может считаться "решающим доказательством" того, что пройденный путь не является вектором?

ГЛАВА 1

КИНЕМАТИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 3. Путь и перемещение

1. Линия, которую описывает точка при своем движении, называется траекторией точки. Длина траектории между положением точки в начале некоторого промежутка времени и в конце этого промежутка называется длиной пути, а расстояние между этими точками — перемещением (рис. 1). Перемещение имеет определенное направление от начальной точки к конечной и является, как мы видели, вектором. Длина пути является скаляром. Длину пути будем обозначать буквой l, а перемещение $\vec{s}$.

Если точка движется по прямой линии в одну сторону, то пройденный путь совпадает с перемещением (т. е. с абсолютной величиной перемещения).

Упр. 1. Машина проехала по прямой 10 км и вернулась по тому же пути в первоначальную точку. Чему равен путь, пройденный машиной, и ее перемещение?

Упр. 2. Как ведется расчет за поездку на такси: за пройденный путь или за перемещение?

§ 4. Материальная точка

1. Разные точки одного и того же тела могут проходить различные пути. Например, в карусели точки, далекие от оси, проходят больший путь, чем близкие точки. Но во многих случаях этими различиями можно пренебречь и положение всего тела характеризовать как положение точки. Например, когда надо узнать, в какое время спутник пролетит над данным пунктом, мы спутник считаем точкой. Другое дело, если надо выяснить, правильно ли развернуты солнечные батареи, питающие спутник электроэнергией. Тут надо учитывать, что разные точки спутника по-разному расположены относительно направления на Солнце. Тело, размерами которого можно пренебречь в данной задаче, называют материальной точкой. В первом примере спутник можно было считать материальной точкой, во втором — нельзя.

2. Если все части тела описывают одинаковые траектории, то движение всего тела можно отобразить движением одной точки. В этих случаях также вместо того, чтобы говорить о движении тела, мы иногда будем говорить о движении точки.

§ 5. Равномерное движение

1. Простейшим видом движения является равномерное. Равномерным называют такое движение, когда за любые равные промежутки времени тело совершает одинаковые перемещения. Отношение перемещения ко времени называют скоростью:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}. \tag{1}$$

Скорость при равномерном движении остается постоянной в любом промежутке.

Если в момент, который мы выбрали за начальный, положение тела задано вектором $\vec{r}_0$ (рис. 5), то к моменту t положение тела будет определяться вектором

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \tag{2}$$

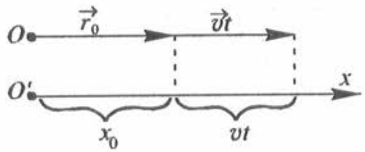


Рис. 5

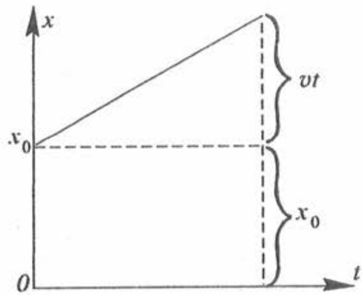


Рис. 6

По формулам, написанным в векторной форме, численные расчеты вести нельзя. Их можно вести только с их модулями или же с проекциями на оси координат. При прямолинейном движении будем направлять координатную ось вдоль скорости. Из рис. 5 видно, что координаты тела в момент t

$$x = x_0 + vt, \tag{3}$$

где x_0 — координата тела в начальный момент, v — проекция скорости на ось x. Эта проекция так же, как и координата x_0, может быть как положительной, так и отрицательной[1].

2. Уравнение (3) есть, как известно из курса алгебры, уравнение прямой. Таким образом, график, выражающий зависимость координаты от времени, является в нашем случае прямой (рис. 6). Чем больше скорость, тем круче наклон прямой (тангенс угла наклона равен v).

График скорости[2] равномерного движения $v(t)$ есть прямая линия, параллельная оси времени (рис. 7).

---

[1] Иногда в разговорной речи ради краткости говорят: "скорость положительная" или "скорость отрицательная"; при этом подразумевается не сама скорость, а ее проекция, так как вектор сам по себе не может быть ни положительным, ни отрицательным.

[2] Точнее надо бы говорить не "график скорости", а "график проекции скорости", но педантичная точность в выражениях иногда делает фразы громоздкими и трудными для восприятия.

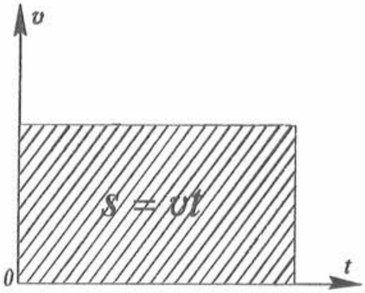


Рис. 7

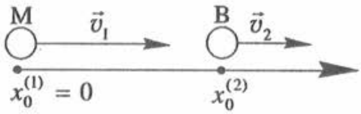


Рис. 8

Из рисунка видно, что площадь под графиком скорости равна перемещению тела.

§ 6. Примеры решения задач

1. Мотоциклист двигался с постоянной скоростью 15 м/с, а велосипедист, находившийся впереди на расстоянии 50 м, — со скоростью 5 м/с в ту же сторону. Через какое время мотоциклист догонит велосипедиста?

Р е ш е н и е. Делаем рисунок (рис. 8) и направляем ось координат вдоль движения. Уравнение движения каждого ездока описывается формулой (3). Если начало координат поместить там, где в начальный момент был мотоциклист, то уравнения движения получатся такими:

$$x_1 = 15t,$$
$$x_2 = 50 + 5t.$$

В момент обгона их координаты станут одинаковыми: $x_1 = x_2$.

$$15t = 50 + 5t, \text{ откуда } t = 5 \text{ с}.$$

Предпочтительнее, однако, сначала решать задачи “в буквах”. Единственное число, которое подставляется сразу при таком решении, — это нуль. “Буквенное” решение будет таким:

$$x_1 = v_1 t,$$
$$x_2 = x_0^{(2)} + v_2 t,$$

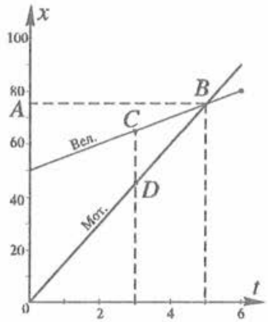


Рис. 9

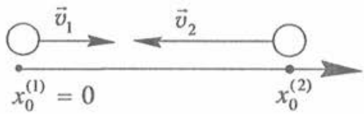


Рис. 10

$$x_1 = x_2 \text{ или } v_1 t = x_0^{(2)} + v_2 t,$$

$$\text{отсюда } t = \frac{x_0^{(2)}}{v_1 - v_2};\ t = \frac{50}{15-5} = 5 \text{ с.}$$

2. Постройте в одних и тех же координатных осях графики $x(t)$ мотоциклиста и велосипедиста (см. предыдущую задачу) за 6 секунд. Масштаб примите такой: 1 см — 0,5 с; 1 см — 10 м. Определите по графику: а) через какое время мотоциклист обгонит велосипедиста; б) каково будет расстояние между ними через 3 с после начального момента?

Решение. Строим оси координат (на рис. 9 они представлены в уменьшенном масштабе). Оба графика являются прямыми линиями, значит, каждый график можно построить по двум точкам. У мотоциклиста в начальный момент координата была равна нулю, а так как за 6 с он проедет $15 \cdot 6 = 90$ м, то в этот момент его координаты будут (6 с; 90 м). По этим двум точкам проводим прямую. У велосипедиста в начальный момент координата была равна 50 м, а так как за 6 с он проедет $5 \cdot 6 = 30$ м, то в этот момент его координаты будут (6 с; $50 + 30 = 80$ м). По этим двум точкам проводим прямую.

Время от начального момента до момента обгона выражается отрезком *AB* (5 с), а расстояние между ними через 3 с — отрезком *CD* (20 м).

3. Два велосипедиста, отстоявшие друг от друга на 60 м, движутся навстречу друг другу. Первый — со скоростью 5 м/с, второй — со скоростью 10 м/с. Определите время, прошедшее до момента их встречи.

Р е ш е н и е. Делаем рисунок (рис. 10). Если начало координат совместить с начальным положением первого велосипедиста, то уравнения их движения будут такими:

$$x_1 = 5t,$$
$$x_2 = 60 - 10t.$$

В момент встречи $x_1 = x_2$ или $5t = 60 - 10t$, откуда $t = 4$ с.

Как уже указывалось, предпочтительнее сначала решать задачи в буквах. В данном случае возможны два варианта записи условия и решения. В первом варианте условие записывается так: $\upsilon_1 = 5$ м/с, $\upsilon_2 = -10$ м/с, $x_0^{(1)} = 0$, $x_0^{(2)} = 60$ м. Уравнения движения получатся такими:

$$x_1 = \upsilon_1 t,$$
$$x_2 = x_0^{(2)} + \upsilon_2 t.$$

Далее $x_1 = x_2$ или $\upsilon_1 t = x_0^{(2)} + \upsilon_2 t \Rightarrow t = \dfrac{x_0^{(2)}}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$;

$$t = \frac{60}{5-(-10)} = 4 \text{ с.}$$

В другом варианте под υ_2 подразумевают абсолютную величину скорости, но, чтобы не загромождать запись скобками $|\vec{\upsilon}_2|$, обычно скобок не пишут. Тогда уравнения выглядят так:

$$x_1 = \upsilon_1 t,$$
$$x_2 = x_0^{(2)} - \upsilon_2 t.$$

Далее $x_1 = x_2$ и т. д., откуда $t = \dfrac{x_0^{(2)}}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$; $t = \dfrac{60}{5+10} = 4$ с.

Иногда при составлении уравнений для векторных проекций удобна первая форма записи, иногда — вторая. Обычно путаницы при этом не происходит.

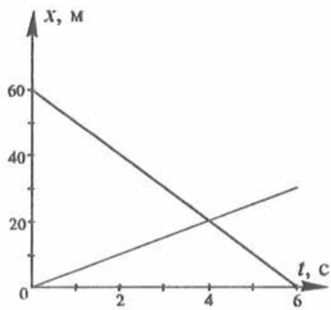


Рис. 11

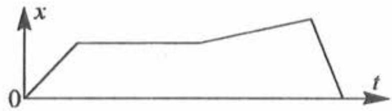


Рис. 12

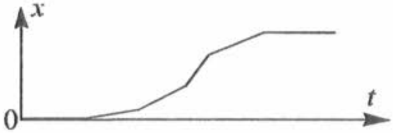


Рис. 13

4. Решите предыдущую задачу графически, построив оба графика $x(t)$ за 6 с. Масштаб: 1 см — 0,5 с; 1 см — 10 м. (О т в е т: (в уменьшенном масштабе) см. рис. 11).

5. Скорость: а) 72 км/ч выразите в м/с; б) 10 м/с выразите в км/ч.

Р е ш е н и е. а) $72 \text{ км/ч} = 72 \dfrac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 20 \text{ м/с};$

$$\text{б) } 10 \text{ м/с} = 10 \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}} = 36 \text{ км/ч}.$$

Упр. 1. Покажите на графике рис. 9, какой отрезок изображает путь, пройденный мотоциклистом: а) за первую секунду; б) за первые две секунды; в) за вторую секунду; г) за третью секунду.

Упр. 2. Покажите на графике рис. 9, какой отрезок изображает время, за которое мотоциклист добрался до того места, где в начальный момент был велосипедист.

Упр. 3. Объясните, каков был характер движения тел на отдельных участках, графики $x(t)$ которых изображены на рис. 12, 13, 14.

Упр. 4. Мотоциклист двигался со скоростью 15 м/с, а велосипедист, находившийся на 50 м впереди, — со скоростью 5 м/с в ту же сторону (рис. 8). а) Каково будет расстояние между ними через 2 с; б) через какое время (после начального момента) мотоциклист окажется впереди велосипедиста на расстоянии $l = 100$ м? (О т в е т: 30 м; 15 с).

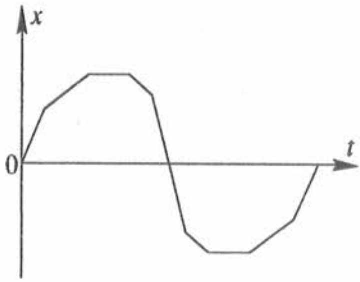


Рис. 14

§ 7. Средняя скорость неравномерного движения

1. Для характеристики неравномерного движения вводят понятие о средней скорости, о мгновенной скорости и об ускорении. Средней скоростью называют отношение перемещения[1] к промежутку времени, за который оно произошло:

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\vec{s}}{t}. \qquad (4)$$

Например, если за 3 часа поезд прошел 300 км, то средняя скорость за это время составила 100 км/ч (независимо от того, как двигался поезд на отдельных участках).

Упр. 1. Поезд шел 9 часов с постоянной скоростью 100 км/ч и 1 час с постоянной скоростью 200 км/ч. Какова была средняя скорость поезда за 10 часов движения? (О т в е т: 110 км/ч).

Упр. 2. Первые 2 часа поезд шел с постоянной скоростью 30 км/ч, а следующие 4 часа — с постоянной скоростью 60 км/ч. Постройте график скорости в зависимости от времени. Рассчитайте также среднюю скорость движения: а) за первые 2 часа; б) за первые 4 часа; в) за все 6 часов. (О т в е т: 30 км/ч; 45 км/ч; 50 км/ч).

Упр. 3. Машина прошла 240 км. Первую половину пути она шла с постоянной скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути — с постоянной скоростью 60 км/ч. Какова

---

[1] Иногда средней скоростью называют отношение не перемещения, а пройденного пути ко времени. Обычно по условию задачи ясно, что именно подразумевают под средней скоростью.

была средняя скорость машины за все время движения? (О т в е т: 48 км/ч).

Упр. 4. В предыдущей задаче есть лишние данные: 240 км. Решите задачу, считая, что длина пути не дана.

У к а з а н и е. Считайте, что пройденный путь дан, и он равен s.

§ 8. Мгновенная скорость и ускорение

1. Предположим, мимо нас проехал мотоцикл, и нам поручили узнать, какова была его скорость в тот момент, когда он был в определенной точке напротив нас. Будем считать, что на пути движения мотоцикла установлены автоматы, способные точно фиксировать момент, когда с ними поравнялся мотоцикл (как это сейчас делается на спортивных соревнованиях). На каждом автомате пусть указано расстояние до интересующей нас точки. Если мы выберем какой-то промежуток времени, например, 10 минут и поделим пройденный путь на это время, то найдем среднюю скорость мотоцикла за это время. Однако это вовсе не значит, что такой была его скорость в тот момент, когда он проезжал мимо нас. Он после этого мог тормозить или, наоборот, разгоняться так, что средняя скорость, измеренная за меньший промежуток времени (например, за первые 5 минут), может заметно отличаться от скорости, измеренной за 10 минут. Другое дело, если взять достаточно малый промежуток времени, например, 0,01 секунды. Если мы измерим среднюю скорость за 0,01 секунды и за половину этого промежутка, то практически получим одно и то же число, так как за столь короткое время мотоцикл не может заметно изменить свою скорость. Таким образом, мгновенной скоростью будем называть среднюю скорость, вычисленную за достаточно малый промежуток времени:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}, \qquad (5)$$

где Δt — достаточно малый промежуток времени.

Это определение не является строгим, так как не всегда ясно, что означает “достаточно малый промежуток времени" (а при разных значениях Δt могут получаться разные значения мгновенной скорости). Строгое определение дается формулой

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{s}' \qquad (\text{или } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'). \tag{5a}$$

2. Отношение прироста скорости (мгновенной) ко времени, за которое этот прирост произошел, называют ускорением:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}. \tag{6}$$

Строго говоря, определенную так величину называют средним ускорением. Мгновенным ускорением (или ускорением в данный момент) называют среднее ускорение за малый промежуток времени:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

где Δt — достаточно мало́ (или более точно:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{v}' = \vec{s}'').$$

Упр. 1. Тело движется с постоянным ускорением a = 10 м/с². Что это значит? (О т в е т: это значит, что каждую секунду скорость тела возрастает на 10 м/с).

Упр. 2. (Решите устно). За 3 с скорость тела возросла с 20 м/с до 26 м/с. С каким средним ускорением двигалось тело?

Упр. 3. (Решите устно). Тело движется с постоянным ускорением 4 м/с². В начальный момент скорость тела была 20 м/с. Какова будет его скорость через 3 с?

§ 9. Равноускоренное движение

1. Равноускоренным называют такое движение, когда в любые равные промежутки времени скорость изменяется одинаково. Ускорение при таком движении, очевидно, является постоянным.

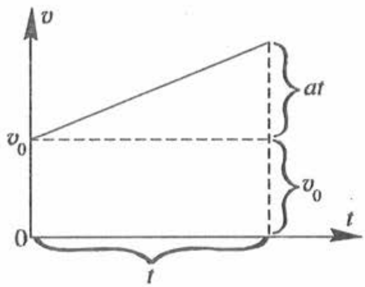


Рис. 15

Из определения термина “ускорение” (6) следует, что скорость тела спустя t секунд после начального момента

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \qquad (7)$$

где v_0 — скорость тела в момент, который мы выбрали за начальный.

Эта формула применима и в том случае, если движение не является равноускоренным, если под a подразумевать среднее ускорение за время t, но в этом случае пользоваться формулой затруднительно (так как на разных участках среднее значение ускорения различно).

2. Графиком скорости равноускоренного движения является прямая линия (рис. 15), так как проекция уравнения (7) на ось, параллельную направлению движения, есть уравнение прямой[1]

$$v = v_0 + at. \qquad (8)$$

Раньше мы установили, что если скорость постоянна, то площадь под графиком скорости (рис. 7) численно равна перемещению тела. Можно доказать (мы примем это без доказательства), что это верно и для непостоянной скорости, т. е. при любой форме графика. Таким образом, чтобы найти перемещение при равноускоренном движении, надо найти площадь под графиком скорости (рис. 15). Из рисунка видно, что величина перемещения

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad (9)$$

есть координата тела $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, причем x_0, v и a могут быть как положительными, так и отрицательными.

---

[1] После того, как учащиеся твердо усвоили, что перемещение, скорость и ускорение — векторы, мы до конца этой главы не будем писать уравнения в векторной форме, а будем иметь дело только с проекциями этих векторов.

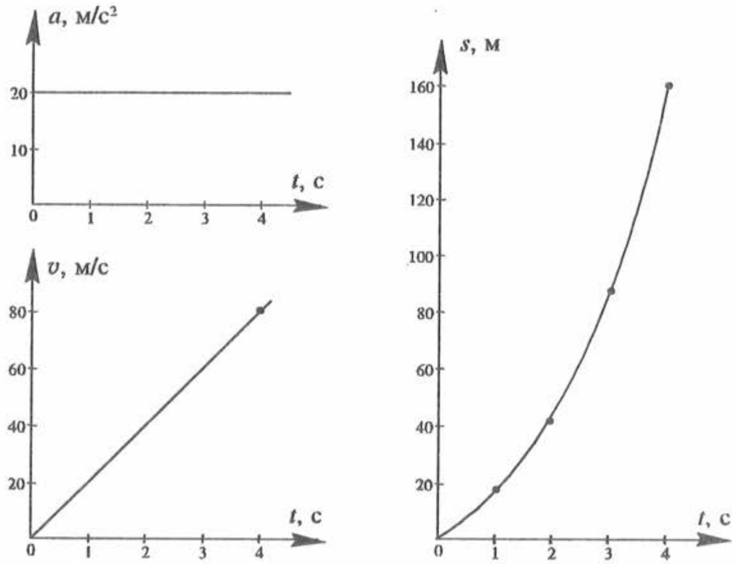


Рис. 16

3. Если исключить из формул (8) и (9) время, то получим

$$v^2 - v_0^2 = 2as.$$

Наконец, если подставить в определение средней скорости (4) выражение для перемещения (9), то после преобразования получим

$$v_{ср} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

4. Если начальная скорость равна нулю, то формулы упрощаются: выпадают слагаемые, содержащие v_0 (см. сводную таблицу в следующем параграфе).

Упр. 1. Начальная скорость тела равна нулю, ускорение a = 20 м/с². Постройте графики зависимости $a(t)$, $v(t)$, $s(t)$ за 4 с. (О т в е т: см. рис. 16).

§ 10. Сводка формул кинематики

Любое движение	Равноускоренное движение	
	общий случай	$v_0 = 0$
$v_{ср} = \frac{s}{t}$ (определение)	$v = v_0 + at$	$v = at$
	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$s = \frac{at^2}{2}$
	$v^2 - v_0^2 = 2as$	$v^2 = 2as$
	$v_{ср} = \frac{v_0 + v}{2}$	$v_{ср} = \frac{v}{2}$

§ 11. Задачи на равноускоренное движение[1]

1. Из формул равноускоренного движения получите формулу равномерного движения (как частный случай).

2. Автомашина, двигаясь равноускоренно, за 5 секунд увеличила свою скорость с 20 м/с до 30 м/с. С каким ускорением двигалась машина и какой путь прошла она за это время? (О т в е т: 2 м/с^2, 125 м).

3. Тело начало двигаться из состояния покоя равноускоренно и за первую секунду прошло путь 10 м. Найдите ускорение тела и путь, пройденный им за первые 3 секунды движения. (О т в е т: 20 м/с^2, 90 м).

4. Тело начало двигаться из состояния покоя равноускоренно и за первую секунду прошло путь 10 м. Какова была мгновенная скорость тела в конце первой секунды? (О т в е т: 20 м/с).

5. Тело начало двигаться из состояния покоя и первые 4 секунды двигалось с постоянным ускорением 2 м/с^2, после чего стало двигаться равномерно. Какой путь прошло тело

---

[1] К каждой задаче (кроме первой) перед тем, как начать ее решать, рекомендуем начертить от руки график $v(t)$ и проставить на осях графика те числа, что даны в условии. На первых порах при решении задач держите перед собой сводную таблицу формул (§ 10).

за первые 10 секунд движения? Какова была его средняя скорость за эти 10 секунд? (О т в е т: 64 м; 6,4 м/с).

6. Первые 4 секунды тело двигалось с постоянной скоростью 20 м/с, после чего стало двигаться с ускорением 5 м/с^2. Какова будет скорость тела через 10 секунд после начального момента и какой путь оно пройдет за это время? (О т в е т: 290 м).

7. Машина, двигаясь равноускоренно, увеличила свою скорость с 10 м/с до 20 м/с, пройдя при этом путь 100 м. Каково ее ускорение? (О т в е т: 1,5 м/с^2).

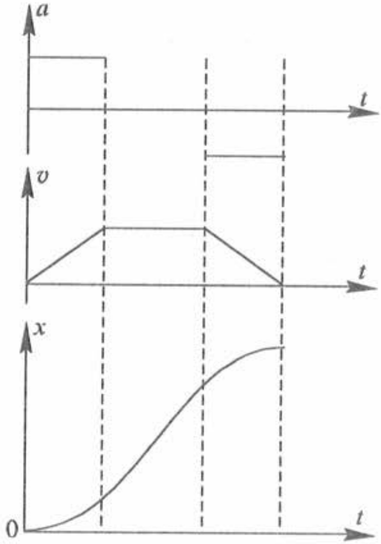


Рис. 17

8. Машина, имевшая скорость 30 м/с, начала тормозить и остановилась через 3 секунды. Каково было ее ускорение и какой путь прошла она при торможении? (О т в е т: –10 м/с^2; 45 м).

9. Машина, двигавшаяся со скоростью 20 м/с, прошла при торможении до полной остановки путь 15 м. Каково было ускорение машины при торможении? (О т в е т: –13,3 м/с^2).

10. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло за первые 2 секунды путь 10 м. Какой путь прошло оно за следующие 2 секунды? (О т в е т: 30 м).

11. Тело начало двигаться из состояния покоя с постоянным ускорением 10 м/с^2. Какой путь пройдет это тело за третью секунду своего движения? (О т в е т: 25 м).

12. Тело начало двигаться из состояния покоя равноускоренно и за четвертую секунду своего движения прошло путь 35 м. С каким ускорением двигалось тело? (О т в е т: 10 м/с^2).

13. Два тела начали одновременно двигаться из состояния покоя в одном направлении из одной точки. Первое тело двигалось с постоянным ускорением 5 м/с^2, а второе — с постоянным ускорением 3 м/с^2. Через какое время расстояние между телами станет равным 25 м? (О т в е т: 5 с).

14. График скорости тела в зависимости от времени имеет форму равнобедренной трапеции. Покажите, как выглядит график ускорения и график пути в зависимости от времени. (О т в е т: см. рис. 17).

15. Из формул $v = at$ и $s = \frac{at^2}{2}$ исключите t. (О т в е т: $v^2 = 2as$).

16. Из формул $v = v_0 + at$ и $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ исключите t. (О т в е т: $v^2 - v_0^2 = 2as$).

17. Докажите, что если $v_0 = 0$, то $v_{ср} = \frac{v}{2}$.

18. Докажите, что $v_{ср} = \frac{v_0 + v}{2}$.

§ 12. Свободное падение

1. Примером равноускоренного движения является свободное падение. Так называют такое падение, когда на тело действует только сила тяжести, т. е. когда сопротивление воздуха отсутствует. Строго говоря, свободное падение можно наблюдать только в вакууме, но если тело массивное и скорость его не очень велика, то сопротивлением воздуха можно пренебречь и падение в воздухе считать свободным.

2. В воздухе очень легкие тела (пушинки, листья) падают заметно медленнее, чем тяжелые. Великий итальянский физик Галилей (1564—1642 гг.) опытами и рассуждениями сумел доказать, что сопротивление воздуха по-разному влияет на падение легких и тяжелых тел, и только этим объясняется различие во времени их падения. В пустоте они должны падать одинаково быстро. Уже после смерти Галилея был изобретен воздушный насос, способный выкачивать воздух из сосудов. Выкачав воздух из стеклянной трубки, прямыми опытами доказали, что даже самые легкие тела в вакууме падают так же быстро, как тяжелые. Помещая в трубку птичье перышко и металлическую гирьку, убедились, что в вакууме они падают одинаково быстро. Если впустить в трубку немного воздуха, то перышко отстает от гирьки. Особенно велико отставание, когда в трубке устанавливается нормальное атмосферное давление.

3. Галилей опытным путем открыл закономерности свободного падения. Он установил, что:

а) свободное падение является движением равноускоренным;

б) ускорение легких и тяжелых тел одинаково.

Ускорение свободного падения обозначают буквой "g". Измерения показали, что $g \approx 9,8$ м/с^2.

Поскольку свободное падение есть движение равноускоренное, для расчета этого движения годятся все формулы равноускоренного движения (§ 10). Только ускорение обозначают в этом случае не "a", а "g".

§ 12а. Задачи на расчет свободного падения[1]

1. Сколько времени и с какой высоты падал камень, если в момент падения его скорость была 30 м/с? (О т в е т: 3 с; 45 м).

2. Из одной и той же точки уронили сначала один камень, а через 2 с — другой. Каково будет расстояние между камнями через 5 с после того, как уронили первый камень? (О т в е т: 80 м).

3. Тело свободно падает с высоты 45 м. Какой путь прошло оно за последнюю секунду своего падения? (О т в е т: 25 м).

4. Свободно падающее тело за последние 2 с своего падения прошло 40 м. Сколько времени оно падало? (О т в е т: 3 с).

[1] Во всех этих задачах принять $g = 10$ м/с^2. Начальную скорость считать равной нулю, если в условии не оговорено противное.

5. Тело свободно падало 4 с. Какую начальную скорость надо было ему сообщить, чтобы оно прошло тот же путь за вдвое меньшее время? (О т в е т: 30 м/с).

6. Одно тело начало свободно падать с высоты h, а второе одновременно бросили вниз с вдвое большей высоты. Какую начальную скорость сообщили второму телу, если оно упало одновременно с первым? (О т в е т: $\sqrt{\frac{gh}{2}}$).

ГЛАВА 2

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

§ 13. Система отсчета и относительность движения

1. При описании различных движений систему координат часто связывают с Землей (так, в частности, мы делали во всех задачах, которые решали до сих пор). Но это не обязательно, можно связать ее с любым другим телом, например, с поездом, с самолетом и т. п. С пустым пространством систему координат связать невозможно, так как в пустом пространстве нельзя сделать никакой "отметки", которую мы могли бы снова потом найти[1]. Поэтому бессмысленно ставить вопрос, переместилось ли данное тело "вообще", т. е. относительно пустого пространства, или нет. О перемещении тела (и о его местоположении) имеет смысл говорить только после того, как выбрано другое тело, называемое телом отсчета, и с этим телом связали определенную систему координат.

Для описания движения нужны также часы. Совокупность системы координат, связанной с определенным телом

---

[1] Мы могли бы поместить начало координат в точке мирового пространства, где перекрещиваются линии, соединяющие две пары звезд. Но это означало бы, что мы связали начало координат с этими звездами, а не с пустым пространством.

отсчета, и прибора для отсчета времени называется системой отсчета.

2. Данное тело может покоиться относительно одной системы отсчета и двигаться относительно другой. Например, пассажир, лежащий на полке вагона, покоится относительно вагона (и связанной с ним системы отсчета) и движется относительно Земли. Траектория движения в разных системах отсчета также будет разной. Например, если с полки вагона уронили яблоко, то относительно вагона оно будет двигаться прямолинейно, а относительно Земли — по кривой (параболе). Мы видим, что всякое движение относительно. Это значит, что о положении или о движении тела можно говорить только по отношению к той или иной системе отсчета, причем относительно разных систем движение одного и того же тела будет выглядеть по-разному.

Упр. 1. Приведите примеры относительности движения.

§ 14. Сложение перемещений и скоростей

1. Иногда бывает, что задано движение тела относительно одной системы отсчета и надо найти его движение относительно другой системы, причем эти системы движутся друг относительно друга. Решение этой задачи называется сложением движений.

Рассмотрим такую задачу. Пусть пассажир переместился относительно вагона на расстояние OB, а вагон относительно рельсов (за то же время) — на OO' (рис. 18). Требуется найти перемещение пассажира относительно рельсов. Опыт показывает, что оно будет таким же, как если бы оба эти движения совершались не одновременно, а по очереди (в этом заключается так называемый принцип независимости движений). Но если сначала вагон с неподвижным пассажиром переместится из O в O', а потом пассажир пройдет по неподвижному вагону из O' в B', то результирующее перемещение будет равно OB'. Значит, в тех случаях, когда тело одновременно участвует в двух

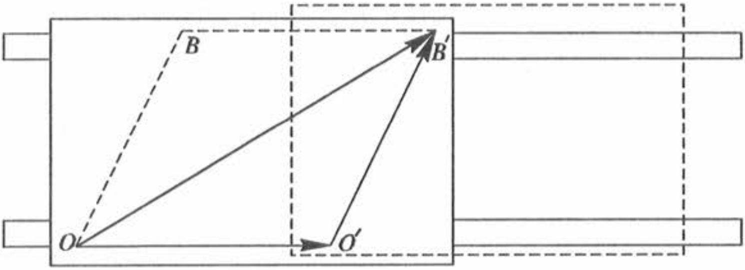


Рис. 18

движениях, результирующее перемещение равно (как и при "поочередных перемещениях") векторной сумме составляющих перемещений: $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.

2. Если левую и правую части предыдущего выражения поделить на время, то получим выражение для средних скоростей: $\vec{v}_{ср} = \vec{v}_{1ср} + \vec{v}_{2ср}$.

Мгновенная скорость есть средняя скорость за достаточно малый промежуток времени, значит это равенство справедливо и для мгновенных скоростей: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Таким образом, если тело одновременно участвует в двух движениях, то результирующая скорость является векторной суммой составляющих скоростей. В частном случае, когда обе составляющие скорости постоянны, результирующая скорость также является постоянной.

§ 15. Примеры решения задач

1. Плот имеет форму квадрата, сторона которого l = 12 м, и плывет по реке со скоростью v_1 = 6 м/с (рис. 19). Собака обегает плот по периметру, начиная с точки A (по часовой стрелке) с постоянной по модулю скоростью v_2 = 4 м/с (относительно плота). Каково было перемещение собаки относительно берега на каждом из четырех этапов ее бега?

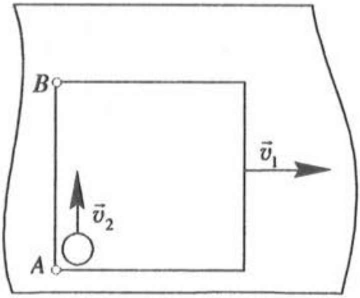


Рис. 19

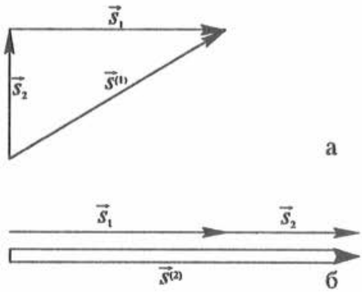


Рис. 20

Р е ш е н и е. Найдем, за какое время собака пробегает одну сторону плота. Для этого за тело отсчета принимаем плот. Очевидно, $t = \frac{l}{v_2}$; $t = \frac{12}{4} = 3$ с. За это время плот (в частности, точка B плота) переместится относительно берега на $s_1 = v_1 t$; $s_1 = 6 \cdot 3 = 18$ м. Теперь надо найти векторную сумму перемещений s_1 и s_2, где $s_2 = l = 12$ м (рис. 20а). По теореме Пифагора находим $s^{(1)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$; $s^{(1)} = \sqrt{18^2 + 12^2} \approx 21{,}6$ м.

Предпочтительнее сначала решить до конца задачу в буквах:

$$t = \frac{l}{v_2};$$

$$s_1 = v_1 t = v_1 \frac{l}{v_2};$$

$$s^{(1)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{l^2 + \left(v_1 \frac{l}{v_1}\right)^2} = l\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}.$$

На втором этапе, как видно из рис. 20б, $s^{(2)} = s_1 + s_2$; $s^{(2)} = 30$ м. На третьем и четвертом этапе $s^{(3)} = 21{,}6$ м, $s^{(4)} = 6$ м (решите задачу до конца самостоятельно).

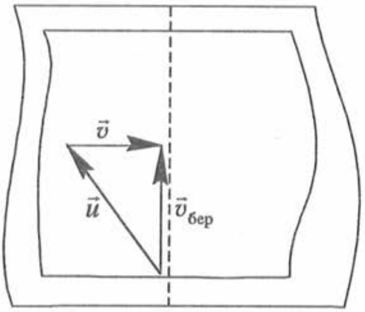


Рис. 21

2. По всей реке почти вплотную друг к другу плывут плоты со скоростью v. Два мальчика перебегают по этим плотам с одного берега на другой со скоростью u (относительно плотов). Первый движется перпендикулярно плотам, второй — перпендикулярно берегу. Через какое время каждый из них достигнет другого берега? Ширина реки равна l.

Р е ш е н и е. В первом случае за тело отсчета берем плоты. Мальчик должен пробежать путь l со скоростью u, значит, $t_1 = \frac{l}{u}$. Во втором случае за тело отсчета берем берег. Скорость мальчика относительно берега есть векторная сумма двух скоростей: $\vec{u}$ и $\vec{v}$ (рис. 21). По теореме Пифагора находим искомую скорость $v_{бер} = \sqrt{u^2 - v^2}$, откуда $t_2 = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}$.

3. Рыбак переплывает на лодке реку шириной $l = 300$ м, двигаясь перпендикулярно течению (а не берегу!). Скорость лодки относительно воды $u = 1{,}5$ м/с, скорость течения $v = 1{,}2$ м/с. На какое расстояние снесет лодку вниз по течению за то время, пока рыбак доберется до другого берега?

Р е ш е н и е. Для наглядности можно представить, что вся река заставлена плотами и рыбак пробирается перпендикулярно плотам со скоростью 1,5 м/с. Ясно, что он очутится на том берегу через время $t = \frac{l}{u}$. За это время плоты будут снесены вниз по течению на расстояние $s = vt = v\frac{l}{u}$; $s = \frac{300}{1{,}5} \cdot 1{,}2 = 240$ м.

4. Один велосипедист движется вправо со скоростью 5 м/с, другой — навстречу ему, т. е. влево, со скоростью 10 м/с. Какова относительная скорость одного из велосипедистов относительно другого?

Р е ш е н и е. Один из возможных способов рассуждения таков. Возьмем за тело отсчета первого велосипедиста. Если бы второй даже покоился относительно Земли, то он двигался бы относительно первого велосипедиста (вместе с Землей) со скоростью 5 м/с (влево). Но он еще движется относительно Земли (тоже влево). Поэтому результирующая скорость будет 5 + 10 = 15 м/с. (Наглядно это можно представить еще так: каждую секунду расстояние между ними сокращается на 5 + 10 = 15 м).

5. В течение какого времени пассажир, сидящий в поезде, который движется со скоростью $v_1 = 15$ м/с, будет перемещаться мимо встречного поезда длиной $l = 350$ м, который следует со скоростью $v_2 = 20$ м/с (обе скорости указаны относительно Земли)?

Р е ш е н и е. Примем за тело отсчета один из поездов, например, второй. Тогда получится такая задача. Мимо неподвижного поезда длиной $l = 700$ м едет пассажир со скоростью $v_{\text{отн}} = 15 + 20 = 35$ м/с.

Отсюда $t = \dfrac{l}{v_{\text{отн}}} = \dfrac{350}{35} = 10$ с.

Решение в буквах: $t = \dfrac{l}{v_1 + v_2}$, где v_1 и v_2 — абсолютные значения скоростей.

6. Моторная лодка идет вниз по течению со скоростью $v_1 = 10$ м/с, а против течения — со скоростью $v_2 = 6$ м/с (обе скорости указаны относительно берега). Определить скорость течения v и скорость лодки в стоячей воде u.

Р е ш е н и е. $\begin{cases} u + v = v_1, \\ u - v = v_2. \end{cases}$

Решая эту систему уравнений, находим $u = 8$ м/с, $v = 2$ м/с.

Упр. 1. Решите задачу № 1 и № 3 из § 6, приняв за тело отсчета одного из велосипедистов.

ГЛАВА 3

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

§ 16. Первый закон Ньютона

1. Наблюдения показывают, что тело, находящееся в покое, может начать движение лишь под действием других тел. Так, вагонетка сдвинется с места лишь тогда, когда ее толкнет паровоз, другая вагонетка или человек и т. д. Мяч начнет двигаться лишь после того, как его ударят ногой или подует ветер (т. е. под действием воздуха) и т. д.

Однако долгое время люди не замечали другой особенности движения. Не только для того, чтобы разогнать тело, но и для того, чтобы замедлить, затормозить начавшееся движение, также необходимо вмешательство других тел. Так, велосипедист не перестает двигаться, когда перестает крутить педали. Правда, в конце концов он останавливается, но это всегда можно объяснить воздействием других тел: стенки, если он на нее налетел, мостовой, если он по ней едет, и т. п. Разные тела воздействуют на него поразному. Если он налетит на стенку, то остановится почти сразу, если же поедет по булыжнику, то остановится не так быстро, на асфальте он прокатится еще дальше. Таким образом, чем меньше воздействуют на велосипед другие тела, тем больший путь прокатится он до остановки. Можно поэтому предположить, что если бы вовсе не было трения (и других помех, например, сопротивления воздуха), то ничто не тормозило бы движения велосипедиста, и если бы он мог перед этим разогнаться, то дальше мог бы ехать, не вращая педалей, без конца.

Подобные рассуждения привели Галилея, а затем Ньютона к выводу, что если на тело не действуют никакие другие тела, то оно сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения.

2. Неспособность тела изменить свою скорость без внешнего воздействия называется инерцией (само слово означает по-латыни леность, бездеятельность). Примеры проявления инерции:

а) трамвай, машина, поезд, лодка и т. д. не останавливаются сразу после выключения двигателя. Только воздействие со стороны рельсов, дороги, воздуха, воды и т. д. приводит к постепенному торможению тела. Чтобы быстро остановить тело, нужно увеличить внешнее воздействие (включить тормоза, опустить весла в воду и т. д.);

б) споткнувшийся на бегу человек падает лицом вперед. Ноги сразу останавливаются препятствием, а верхняя часть туловища не способна остановиться сама по себе и движется по инерции дальше. Если вагон резко трогается с места, наблюдается обратная картина. Ноги, как бы привязанные к полу трением, увлекаются вперед, а голова в первый момент остается на месте, т. е. оказывается позади, и человек может упасть навзничь;

в) бомба, сброшенная с самолета, не летит вертикально вниз, а движется одновременно вперед.

3. Все эти примеры иллюстрируют не сам закон инерции, а следствия его. Непосредственно проверить на опыте этот закон невозможно — нельзя создать такие условия, когда тело не будет взаимодействовать с другими телами (если же представить, что звездолет направили в район, где нет ни звезд, ни других тел, то не совсем ясно, как мы будем выяснять, покоится он или движется). Можно считать, что закон инерции вводится как гипотеза, в правильности которой мы убеждены потому, что все следствия более общей теории, опирающейся на эту гипотезу, подтверждаются опытом.

Упр. 1. Приведите несколько примеров (помимо приведенных в учебнике) движения по инерции.

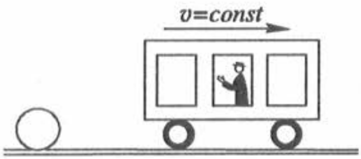


Рис. 22

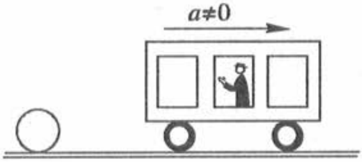


Рис. 23

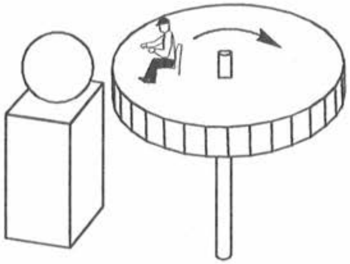


Рис. 24

§ 17. Инерциальная система отсчета

1. При формулировке первого закона Ньютона мы молчаливо предполагали, что в качестве системы отсчета берется Земля. Выясним, будет ли справедлив первый закон, если за тело отсчета брать другие тела.

Возьмем в качестве тела отсчета вагон, который равномерно движется вправо. Пусть на дороге лежит шар, который никто не тянет ни вправо, ни влево (рис. 22). Относительно вагона этот шар движется равномерно и прямолинейно в полном соответствии с первым законом Ньютона. Таким образом, закон инерции справедлив для такого тела отсчета.

Но пусть вагон движется ускоренно с ускорением a (например, вправо, как показано на рис. 23). Теперь пассажир увидит, что шар удаляется от вагона с ускорением a (направленным влево), хотя никакое тело его туда не тянет. Значит, относительно ускоренно движущегося вагона закон инерции не выполняется.

Система отсчета, в которой справедлив закон инерции (а с ним и остальные законы Ньютона), называется инерциальной. Вагон или другое тело, которое движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы отсчета, также является инерциальной системой. Тела, движущиеся ускоренно относительно инерциальной системы, не являются инерциальными системами.

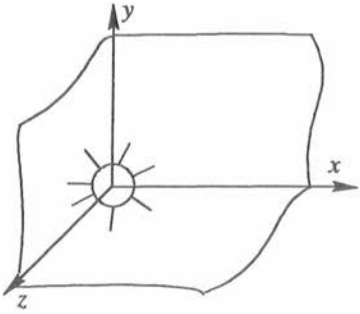


Рис. 25

2. Легко видеть, что карусель или другое тело, которое движется криволинейно относительно инерциальной системы, не является инерциальной системой. В самом деле, наблюдатель на карусели, который считает себя неподвижным, будет видеть шар, лежащий на земле, то спереди, то сзади (рис. 24). Таким образом, относительно карусели шар движется по кривой линии, хотя этот шар никто не толкает в горизонтальном направлении.

Землю можно рассматривать как гигантскую карусель, которая за 24 часа делает оборот относительно звезд. Нам представляется, что каждая звезда за 24 часа обходит Землю, хотя по закону инерции одиночная звезда должна двигаться прямолинейно. Таким образом, Земля не является инерциальной системой.

Правда, поскольку Земля вращается сравнительно медленно, в большинстве практических задач мы можем считать Землю инерциальной системой. Но иногда (при расчете движения спутников, космических кораблей, ракет дальнего действия, маятника Фуко и еще в некоторых случаях) приходится учитывать, что Земля не инерциальная система.

3. Солнце также не является инерциальной системой, так как оно вращается относительно звезд. Центр Солнца, насколько мы можем судить, является точкой инерциальной системы. Но одной точки нам мало. Чтобы отмечать положение космической ракеты или другого тела, надо иметь не точку, а систему координат. Ее начало обычно помещают в центре Солнца, а концы направляют к очень далеким звездам (рис. 25). Такая система отсчета является, насколько сейчас можно судить, инерциальной системой.

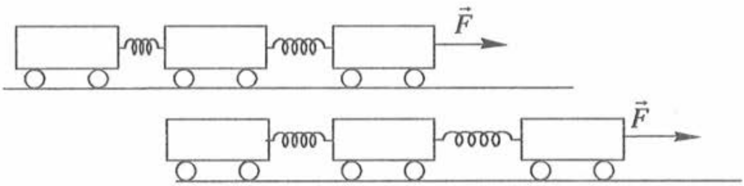


Рис. 26

Упр. 1. Предположим, на Северном полюсе происходит дуэль между двумя персонажами: Севериным и Южиным. Северин стоит точно на Северном полюсе, а Южин — на расстоянии R = 7 м от него. Северин стреляет. Если Земля была бы инерциальной системой, он попал бы точно в ту точку, в которую нацелился. На сколько промахнется он из-за того, что Земля — неинерциальная система? Скорость пули u = 700 м/с, Земля делает один оборот за T = 24 ч.

Указание. Скорость движения точки, где стоит Южин, относительно инерциальной системы:
$v = \frac{l}{t} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7}{24 \cdot 3600} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ м/с = 0,5 мм/с. Время движения пули $t_{\text{п}} = \frac{R}{u} = \frac{7}{700} = 0{,}01$ с.

Упр. 2. Пусть дуэль происходит на экваторе. Например, Северин находится на 3,5 м к северу от экватора, а Южин — напротив него на таком же расстоянии к югу от экватора. Попадет ли пуля точно в ту точку, куда она была нацелена, или же из-за неинерциальности Земли она попадет в другую точку?

Упр. 3. С Северного полюса запустили баллистическую ракету, которая упала на экваторе. Полет ракеты длился 20 мин. Учитывая, что в инерциальной системе отсчета траектория полета лежит в одной плоскости, рассчитайте, на какое расстояние от того меридиана, вдоль которого был произведен запуск ракеты, отклонится ракета в момент приземления. Длина экватора 40 000 км, Земля делает один оборот за 24 ч.

Указание. Сначала рассчитайте скорость вращательного движения точки экватора. (Ответ: 556 км).

§ 18. Сила

1. Если движение тела не является прямолинейным и равномерным, это значит, что на тело действуют другие тела. В таких случаях будем говорить, что на тело действует сила. Таким образом, в механике Ньютона силой называют воздействие одного тела на другое, которое ведет к изменению скорости тела.

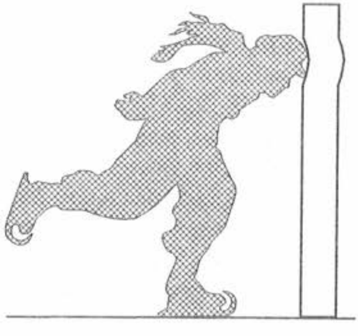


Рис. 27

2. Не все части тела меняют свою скорость одновременно. Представим для наглядности поезд, у которого вагоны соединены друг с другом пружинами (рис. 26). Если первый вагон под действием силы тронется с места, то следующий за ним вагон получит такое же ускорение и скорость (как у первого вагона) лишь после того, как натянется должным образом пружина, соединяющая вагоны. То же произойдет и с другими вагонами. В результате поезд растянется, т. е. деформируется. Любое тело можно сравнить с таким поездом, так как оно состоит из молекул, связанных друг с другом упругими силами, и каждый следующий слой начнет двигаться с таким же ускорением, как предыдущий, лишь после того, как тело несколько растянется. Таким образом, из-за того, что не все слои тела начинают двигаться одновременно, тело под действием силы деформируется.

Итак, сила, приложенная к телу, ускоряет его и деформирует.

3. Понятие силы в быту и в механике Ньютона иногда не совпадает. Например, конькобежец, налетевший на столб (рис. 27), может сказать: “Я хотел остановиться, но не смог. Какая-то невидимая сила несла меня вперед и прижала к столбу”. По Ньютону это не так. Во-первых, если его тянула какая-то сила, значит тянуло какое-то тело. Где же оно, это тело? Его нет, значит, нет и силы. Во-вторых, если бы сила толкала его туда, куда он летел, то скорость конькобежца росла бы. Но этого не было, и снова выходит, что никакая сила его вправо не тянула. На конькобежца подействовала сила только после столкновения, и направлена она была не вправо, а влево, так как она не ускоряла, а тормозила движение конькобежца.

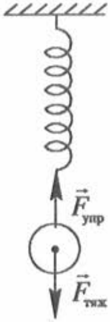


Рис. 28

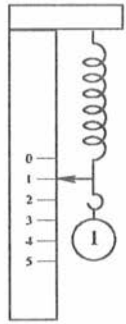


Рис. 29

§ 19. Равновесие сил

1. Иногда бывает, что на тело действуют силы, а скорость тела не меняется. В этих случаях говорят, что эти силы уравновешены. В частном случае, если уравновешены две силы, то эти силы будем считать по определению равными по модулю и противоположными по направлению. Например, гиря, подвешенная к пружине, находится в покое (рис. 28), значит, сила тяжести гири (направленная вертикально вниз) равна по модулю силе упругости пружины (направленной вертикально вверх). Если теплоход движется равномерно, значит, сила тяги винта уравновешивается силой сопротивления воды.

2. Первый закон Ньютона (закон инерции) можно дополнить. Тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения не только тогда, когда на него не действуют другие тела (т. е. не действуют силы), но и тогда, когда силы, приложенные к нему, уравновешены.

§ 20. Измерение сил

1. Для измерения сил можно использовать тот факт, что под действием силы тело деформируется. Можно взять пружину, снабдить ее шкалой, показывающей ее удлинение, и эту шкалу проградуировать. Но сначала надо установить эталон силы. Можно изготовить эталонную гирьку и ее силу тяжести принять за единицу силы. Затем надо сделать несколько одинаковых эталонных гирек и, подвешивая к пружине сначала одну гирьку, затем две и т. д., отметить, при каких растяжениях пружина действует с силой, равной одной единице, двум единицам и т. д. (рис. 29). Проградуированную так пружину называют динамометром.

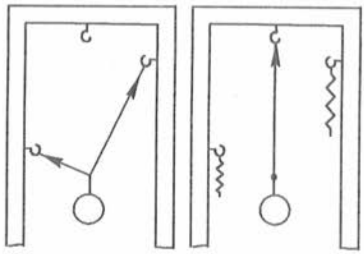


Рис. 30

2. При разметке шкалы динамометра обнаруживается, что двойной силе соответствует двойное растяжение пружины, тройной — тройное и т. д. Это позволяет упростить разметку шкалы. Например, отметив на шкале нуль и растяжение, соответствующее 5 эталонным гирям, мы можем полученное расстояние поделить на 5 равных частей, а затем каждую часть — на еще более мелкие (например, на 10 частей).

3. Для каждой пружины существует определенный предел, больше которого ее не следует растягивать. Если растянуть ее сверх этого предела, то после прекращения действия силы пружина не вернется в прежнее положение и вся градуировка будет нарушена.

4. В физике силу измеряют в ньютонах. Ньютон приблизительно равен силе тяжести гирьки массой 100 г. Точное определение ньютона будет дано дальше.

§ 21. Сложение сил

1. Опыт показывает, что несколько сил, приложенных к данной точке тела, всегда можно заменить одной, которая действует на тело так же, как заменяемые силы. Например, если гиря была подвешена на двух нитях (рис. 30), то их можно заменить одной нитью, и гиря будет висеть так же, как и раньше. Сила, действие которой заменяет совместное действие нескольких сил, называется равнодействующей этих сил. Опыт показывает, что равнодействующая двух сил

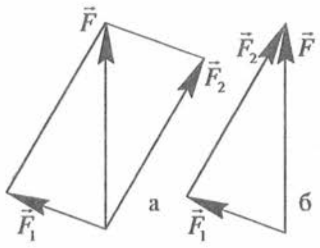


Рис. 31

равна диагонали параллелограмма, построенного на составляющих силах (рис. 31а). Вместо параллелограмма можно строить треугольник (рис. 31б). Направленные величины, которые складываются по правилу параллелограмма (или треугольника), называют векторами. Значит, сила является вектором, а равнодействующая нескольких сил есть векторная сумма этих сил: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

2. Опыт показывает, что в твердом теле точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия силы. При этом результат действия силы на тело (если нас не интересует деформация тела) не меняется. Например, санки можно тянуть спереди, а можно толкать сзади. Такой перенос точки приложения силы никак не влияет на движение санок. Другое дело, если мы перенесем точку приложения силы другим способом, например, если будем тянуть санки не за середину, а за край: тогда санки будут двигаться иначе (они повернутся на определенный угол).

Возможность переноса точки приложения силы вдоль линии ее действия позволяет в некоторых случаях находить равнодействующую сил, приложенных в разных точках тела. Например, если к концам стального стержня приложены две одинаковые, но противоположно направленные силы, то, перенеся их точки приложения в одну точку, увидим, что равнодействующая этих двух сил равна нулю, т. е. стержень находится в равновесии (т. е. либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно). Таким же способом можно находить и равнодействующую нескольких сил, если продолжения этих сил пересекаются в одной точке (см., например, упр. 3).

Упр. 1. К одной точке приложены две силы: 30 Н и 40 Н. Найдите равнодействующую этих сил, если угол между ними равен: а) 0°; б) 90°; в) 180°.

Упр. 2. К одной точке приложены три силы, модули которых одинаковы и равны 10 Н. Угол между каждыми двумя силами равен 120°. Найдите равнодействующую всех трех сил.

Упр. 3. Тело имеет форму плоского прямоугольника. К середине одной стороны, перпендикулярно к ней, приложена сила 1 Н, к середине соседней — 3 Н, а к середине третьей — 5 Н. Найти равнодействующую этих сил.

Указание. Перенести точку приложения каждой из этих сил вдоль линии ее действия так, чтобы все три силы оказались приложенными в одной точке. (Ответ: 5 Н).

Упр. 4. К одной точке приложены три силы, модули которых одинаковы и равны 10 Н. Угол между первой и второй силой равен 60°, между второй и третьей — тоже 60°. Найти равнодействующую всех трех сил. (Ответ: 20 Н).

§ 22. Второй закон Ньютона

1. Второй закон Ньютона позволяет рассчитывать ускорения тел, если известны действующие на них силы и некоторые характеристики этих тел (их массы). Из наблюдений легко заметить, что при увеличении силы растет и ускорение данного тела. Например, чем сильнее ударить клюшкой по шайбе, тем дальше она отлетит (а это означает, что сильный удар ускорял ее больше, чем слабый). Чем сильнее толкать санки, тем быстрее будут они набирать скорость. Чем сильнее тормозить машину, тем быстрее она останавливается.

Для того, чтобы установить точную зависимость между силой и ускорением, надо собрать установку, где можно измерять то и другое. Одна из таких установок показана на рис. 32. Она состоит из тележки, приводимой в движение падающей гирей. Сила, действующая на тележку со стороны нити, измеряется пружинным динамометром (эта сила вовсе не совпадает с силой тяжести гири). На тележку еще действует сила трения, но чтобы ею можно было пренебречь, тележка поставлена на рельсы. Ускорение тележки можно

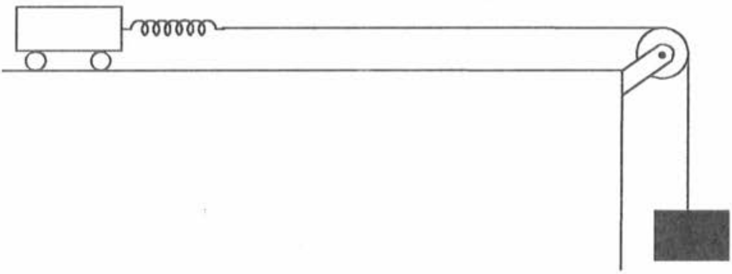


Рис. 32

измерить с помощью линеек и секундомеров по формуле $s = \frac{at^2}{2}$.

2. Измерения показали, что ускорение тела пропорционально приложенной к нему силе. Отсюда следует, что отношение $\frac{F}{a}$ есть величина постоянная для данного тела. Например, если силу удвоить, то ускорение тоже удвоится, отношение же этих величин не изменится.

Опыты показали, что ускорение зависит не только от величины силы, но и от свойств данного тела. Например, если тележку нагрузить и тянуть ее с такой же силой, как прежде, то ускорение станет меньше. Математически это означает, что отношение $\frac{F}{a}$ постоянно только для данного тела, для разных тел оно различно. Таким образом, это отношение характеризует механические свойства данного тела. Это свойство назвали массой. Масса тела, по определению, равна отношению силы к ускорению тела:

$$m = \frac{F}{a}.$$

Из определения массы (а это определение сделано на основе опытов, устанавливающих зависимость ускорения от силы и от свойств тела) следует, что ускорение тела пропорционально приложенной силе и обратно пропорционально массе тела. Направление ускорения, как показывает опыт, точно совпадает с направлением силы. Эта зависимость коротко записывается так:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Если на тело действует несколько сил, то под F подразумевается их равнодействующая, т. е. векторная сумма этих сил:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}.$$

3. Все опыты, на основе которых устанавливался второй закон Ньютона, делались в инерциальной системе отсчета (в неинерциальных системах результаты этих опытов были бы другими). Стало быть, второй закон Ньютона (а также третий) справедлив только в инерциальной системе отсчета.

Упр. 1. Масса буханки вдвое больше массы гири. Что это значит? (Ответ: (один из возможных ответов) это значит, что если на них подействовать с одинаковой силой, то буханка получит вдвое меньшее ускорение, чем гиря).

§ 23. Современная формулировка первого закона Ньютона

1. Если формулировать первый закон так, как это делал сам Ньютон (см. § 16), то получается, что этот закон есть частный случай второго закона. В самом деле, если на тело не действуют другие тела, т. е. если $F = 0$, то ускорение этого тела $a = \frac{F}{m} = 0$. Равенство нулю ускорения означает, что тело движется прямолинейно и равномерно.

Возникает вопрос: нужно ли отдельно формулировать первый закон? Оказывается, все-таки нужно! Первый закон нужен для определения инерциальной системы отсчета. Чтобы выразить это более ясно, первый закон в настоящее время часто формулируют так: существуют такие системы отсчета, где тело, на которое не действуют другие тела, движется прямолинейно и равномерно. Такие системы называют инерциальными.

§ 24. Третий закон Ньютона

1. Из наблюдений и опытов Ньютон установил, что если одно тело действует с некоторой силой на второе, то и второе действует на первое с такой же силой, но направленной в противоположную сторону:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

Примеры, подтверждающие и поясняющие этот закон.

а) Если мы отталкиваем соседнюю лодку, то одновременно отталкивается и наша лодка. Если лодки одинаковы и расположены симметрично, то они получат одинаковые ускорения. Если же лодки различны, то та, у которой масса больше, получит меньшее ускорение.

б) Если давить пальцами руки на стол, то возникнет сила, действующая на пальцы. Чем сильнее нажимать на стол, тем больнее и пальцам.

в) Нельзя поднять себя за волосы (даже космонавту в условиях невесомости). Это доказывает, что с какой силой рука тянет волосы вверх, с такой же силой волосы тянут руку вниз.

г) Ньютон решил непосредственным опытом проверить, с одинаковой ли силой притягивается железо к магниту и магнит к железу. Чтобы исключить силы трения, он закреплял магнит и кусок железа на поплавках, помещенных в ванночку с водой (рис. 33). Измеряя динамометром силы, действующие на каждое из этих тел, он убедился, что эти силы всегда равны.

2. Разберем еще вопрос о лошади и телеге. Лошадь тянет телегу с такой же силой, как телега тянет к себе лошадь (рис. 34). Почему же в таком случае лошадь движется вперед, а не туда, куда тянет ее телега? Дело в том, что на лошадь действует не одна горизонтальная сила, а две: лошадь отталкивается от земли с большей силой, чем оттягивает ее телега, поэтому лошадь движется вперед (и движется при этом ускоренно; при равномерном движении эти две силы равны).

Упр. 1. Один конец веревки тянут с силой 10 Н вправо, а другой конец — с такой же силой влево. С какой силой

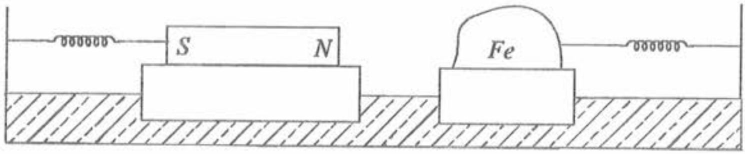


Рис. 33

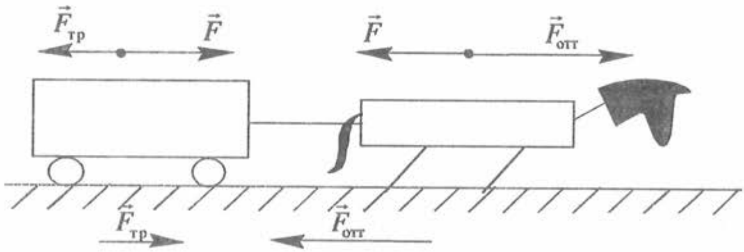


Рис. 34

натянута веревка (например, посередине)? (О т в е т. Разобьем мысленно веревку на две части и рассмотрим условие равновесия левой части. За левый конец ее тянут влево с силой 10 Н. Значит, в проведенном сечении действует вправо сила тоже в 10 Н (со стороны правой части веревки на левую). В результате эта часть веревки находится в равновесии. Если теперь рассмотреть условие равновесия правой части веревки, то увидим, что в этом же сечении на правую часть действует сила 10 Н со стороны левой части).

Итак, веревка всюду натянута с силой 10 Н. В какой бы части веревки мы ни провели мысленно сечение, окажется, что левая часть веревки действует на правую с силой 10 Н, а правая — на левую с такой же (по модулю) силой 10 Н. Такую же силу показал бы динамометр, встроенный в разорванное сечение.

ГЛАВА 4

СИЛЫ В ПРИРОДЕ

§ 25. Сила тяжести

1. Начиная изучать механику, мы в основном будем иметь дело с тремя видами сил: силами тяжести (которые являются частным случаем так называемых гравитационных сил), силами упругости и силами сопротивления движению (трением и сопротивлением среды).

Силой тяжести называется сила, с которой данное тело притягивается к Земле. Согласно второму закону Ньютона любую силу можно найти, помножив массу тела на то ускорение, которое сообщает ему данная сила. Сила тяжести любому телу массой m сообщает ускорение g (g = 9,8 м/с^2), значит, величина силы тяжести

$$F_т = mg.$$

Разумеется, если тело не падает, а подвешено к пружине, сила тяжести тела остается такой же.

2. Поскольку сила тяжести пропорциональна массе, для сравнения масс двух тел можно эти тела взвешивать. Если сила тяжести одного тела больше силы тяжести другого, например, в 5 раз, значит и масса этого тела в 5 раз больше.

§ 26. Центр тяжести

1. Каждое протяженное тело можно представить как совокупность материальных точек. На каждую точку действует сила тяжести. При расчетах неудобно иметь дело с огромным количеством сил, поэтому все отдельные силы тяжести заменяют одной — равнодействующей. Эта равнодействующая равна силе тяжести всего тела, а точка ее приложения (при любых поворотах тела) называется центром тяжести тела.

Центр тяжести тела можно найти опытным путем. Если подвесить тело в какой-либо точке, то, когда установится равновесие, центр тяжести будет лежать на одной вертикали с точкой подвеса (рис. 35). Так получается потому, что две силы, направленные в противоположные стороны, могут уравновеситься только тогда, если одна из них является как бы продолжением другой (в этом случае, перемещая точку приложения одной из сил вдоль линии ее действия, мы получим две противоположно направленные силы, приложенные в одной точке). Подвесив тело в другой точке (а если тело не является плоским, то и в третьей точке) и проведя вертикали через точки подвеса, мы найдем положение центра тяжести: он будет в точке пересечения этих вертикалей.

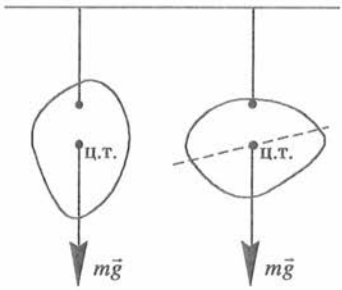


Рис. 35

У симметричных тел (например, у гантели) центр тяжести находится в центре симметрии тела. Это легко проверить опытным путем.

§ 27. Международная система единиц (СИ)

1. В физике, технике и быту приходится измерять множество разнородных величин: расстояния, скорости, объемы, силы, температуры и т. д. Для каждой величины надо установить определенную единицу измерения. Когда-то эти единицы устанавливались независимо друг от друга. Такая несогласованность затрудняла расчеты, так как вела к появлению нежелательных коэффициентов пропорциональности в формулах. Пусть, например, расстояние мы измеряем в метрах, время в секундах, а за единицу скорости приняли рекордную скорость бегуна на стометровой дистанции: 10 м/с. Назовем эту единицу "бег". Нетрудно видеть, что если скорость измерять в "бегах", то формула равномерного движения будет иметь вид $s = 10vt$. Чтобы такого усложнения формулы не было, за единицу скорости принимают такую скорость, когда за 1 с пройденный путь равен 1 м.

2. Для того, чтобы уменьшить число формул с нежелательными коэффициентами, теперь поступают так: только несколько единиц выбирают произвольно, причем их наименования (или иначе "размерности") считаются независимыми друг от друга. Эти единицы называют основными. Все остальные единицы устанавливают с помощью основных, и их наименования выражают через наименования основных единиц. Эти единицы называют производными.

Совокупность основных и производных единиц называется системой единиц. Системы единиц могут быть разные. В настоящее время в России и в подавляющем большинстве других стран принята Международная система единиц (сокращенно обозначается СИ — Система Интернациональная). Основные единицы этой системы и некоторые производные приведены в следующей таблице.

	Величина	Формула, с помощью которой определена производная единица	Единица измерения	
			название	сокр. обозн.
Основные единицы	Длина	—	метр	м
	Время	—	секунда	с
	Масса	—	килограмм	кг
Производные единицы	Скорость	$v = \frac{s}{t}$	метр в сек.	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$
	Ускорение	$a = \frac{v}{t}$	метр на сек. в квадрате	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
	Сила	$F = ma$	ньютон	Н
	Работа	$A = Fs$	джоуль	Дж
	Мощность	$N = \frac{A}{t}$	ватт	Вт

3. Основные единицы стараются определить так, чтобы при утере эталонов их можно было снова восстановить. По мере повышения требований к точности измерений приходилось не раз заменять первоначальные определения другими, обеспечивающими большую точность. Мы приведем здесь первоначальные определения основных единиц, сделанные почти двести лет тому назад. Метр был определен как $\frac{1}{40\ 000\ 000}$ меридиана Земли (так как Земля не является точным шаром, то был выбран определенный меридиан, а именно тот, который проходит через Париж). Секунда была определена как определенная доля суток ($\frac{1}{24 \cdot 3600}$ суток). Килограмм определяли как массу одного кубического дециметра (т. е. литра) чистой воды (при 4 °С).

§ 28. Единица силы

1. Единицей силы в СИ является ньютон (сокращенно Н). Ньютон — это такая сила, которая телу в 1 кг сообщает ускорение в 1 м/с^2.

Эталон ньютона осуществлен с помощью эталонного динамометра. Для градуировки такого динамометра вовсе не обязательно прицеплять его к ускоренно движущемуся телу. Надо иметь набор эталонных гирь и знать точное значение ускорения силы тяжести в данном месте (в разных местах оно неодинаково и колеблется от 9,78 м/с^2 на экваторе до 9,83 м/с^2 на полюсе). Подвешивая к динамометру гирьку известной массы, можно по формуле $F_т = mg$ определить ее силу тяжести и соответствующее число проставить на шкале динамометра (в принципе достаточно иметь одну эталонную гирю, так как удлинение пружины пропорционально приложенной силе).

2. В быту, а иногда и в технике применяют внесистемную единицу силы — килограмм-силу (кгс). Килограмм-силой называют силу тяжести гири в 1 кг. Отсюда следует (из формулы $F_т = mg$), что 1 кгс = 9,8 Н. В быту эту силу называют просто килограммом, что, вообще говоря, неправильно, так как в килограммах может измеряться масса тела, а не сила. Эту единицу пытаются искоренить из применения. Будущее покажет, удастся ли это сделать в ближайшие годы.

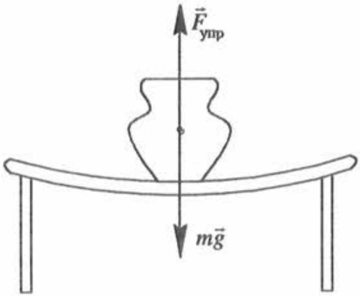


Рис. 36

3. Заметим, что некоторые внесистемные единицы разрешено применять наряду с единицами СИ. К ним относятся единицы времени — час и минута, единица угла — градус (в СИ углы измеряют в радианах), единица массы — атомная единица массы (а. е. м.) и некоторые другие.

Упр. 1. Школьник весит 50 кгс. Выразите его вес в ньютонах (можно считать, что 1 кгс $\approx$ 10 Н).

Упр. 2. Сумеете ли вы поднять груз весом 60 Н?

§ 29. Силы упругости

Силой упругости называют силу, возникающую при деформации тела. Деформацией называют изменение размеров или формы тела. Основные виды деформаций: растяжение, сжатие, изгиб и кручение. При небольших (по сравнению с размерами тела) деформациях возникает сила, которая стремится возвратить тело в то состояние, в котором оно было до деформации. Эта сила и называется силой упругости.

Иногда деформация тела видна “на глаз”. Например, если на скамейку, сделанную из тонкой доски, положить тяжелый груз (рис. 36), то доска начнет заметно прогибаться. С увеличением прогиба упругая сила возрастает и в конце концов достигает такой величины, при которой она уравновесит силу тяжести груза. Сила, с которой опора благодаря деформации действует на груз, называется реакцией опоры. Иногда деформация тела настолько незначительна, что ее трудно обнаружить, но она всегда есть, если возникла упругая сила. Например, если иголку положить на рельс, то рельс прогнется, хотя этот прогиб так незначителен, что его трудно обнаружить. Направление силы упругости при прогибе всегда перпендикулярно поверхности соприкасающихся тел.

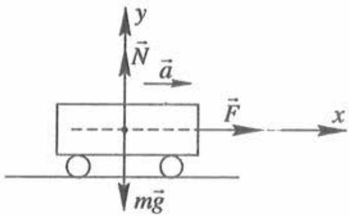


Рис. 37

§ 30. Примеры решения задач

Общие указания.

а) К каждой задаче надо сделать схематический чертеж, на котором показаны все силы, приложенные к тому телу, к которому будет применяться второй закон Ньютона.

б) Второй закон Ньютона при решении задач принято писать "без дробей", т. е. не в форме $\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$, а в форме $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, например, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}$.

в) При проектировании сил на координатные оси принято под символами F_1, F_2 и т. д. подразумевать положительные числа (т. е. абсолютные величины проекций).

1. Покоящуюся вагонетку массой 200 кг стали тянуть горизонтально с силой $F = 400$ Н. С каким ускорением будет двигаться тележка, какова будет ее скорость через 10 с и какой путь пройдет она за это время? Трение не учитывать.

Решение. Делаем схематический чертеж, на котором показаны все силы, действующие на вагонетку, и направление ускорения (рис. 37). Буквой N обозначена реакция опоры, т. е. упругая сила, с которой рельсы действуют на тележку. Строго говоря, упругие силы приложены в 4-х точках, если вагонетка четырехколесная, но эти 4 силы можно заменить одной равнодействующей. Сила N приложена на уровне рельс, но любую силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия.

Второй закон Ньютона для тележки выразится так:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

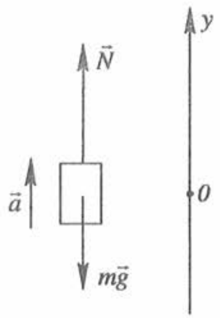


Рис. 38

Координатную ось направляем туда, куда направлено ускорение, и проектируем на эту ось векторное равенство. Получаем $F + 0 + 0 = ma$, откуда $a = \frac{F}{m}$; $a = \frac{400}{200} = 2$ м/с^2. Теперь остается использовать формулы равноускоренного движения: $v = at$ и $s = \frac{at^2}{2}$. Подставляя в эти формулы числа, находим $v = 2 \cdot 10 = 20$ м/с; $s = \frac{2 \cdot 10^2}{2} = 100$ м.

2. С какой силой надо тянуть вверх (например, с помощью веревки) гирю массой 2 кг, чтобы она поднималась с ускорением 4 м/с^2?

Р е ш е н и е. Делаем схематический чертеж, на котором показываем все силы, действующие на гирю, и направление ускорения (рис. 38).

Сила упругости N, действующая со стороны веревки на гирю, больше (по модулю) силы тяжести mg, поскольку ускорение гири направлено вверх. Применяем второй закон Ньютона:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}\,.$$

Координатную ось направляем вертикально вверх (туда, куда направлено ускорение) и проектируем на эту ось обе части векторного равенства

$$N - mg = ma\,,$$

откуда $N = m\,(g + a)$; $N = 2 \cdot (10 + 4) = 28$ Н.

3. Лифт движется вверх с ускорением $a = 4$ м/с^2. На дне лифта лежит ящик массой $m = 20$ кг. С какой силой $N^{(1)}$ ящик давит на дно лифта?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 39). Поскольку второй закон Ньютона мы будем применять к ящику (а не

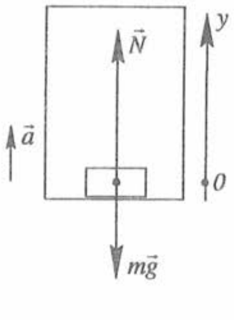


Рис. 39

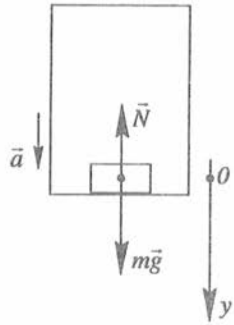


Рис. 40

к лифту), показываем силы, действующие на ящик. На него действуют две силы: сила тяжести mg, направленная вниз, и сила упругости N дна лифта, направленная вверх. При этом сила N больше силы тяжести, поскольку ускорение ящика направлено вверх. Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Проектируя это уравнение на ось, направленную вертикально вверх, получаем

$$N - mg = ma,$$

откуда $N = m(g + a)$; $N = 20\,(10 + 4) = 280$ Н.

Мы нашли силу, с которой дно лифта действует на ящик. Но, согласно третьему закону Ньютона, с такой же силой ящик давит на дно: $|N^{(1)}| = 280$ Н.

4. Лифт движется вниз с ускорением $a = 4$ м/с^2. На дне лифта лежит ящик массой $m = 20$ кг. С какой силой $N^{(1)}$ ящик давит на дно лифта?

Р е ш е н и е. Делаем рисунок (рис. 40) и показываем силы, действующие на ящик. Поскольку ускорение направлено вниз, значит, сила тяжести mg "пересилила" силу N, с которой дно лифта действует на ящик. Значит, $|mg| > |N|$. Составляем уравнение в векторной форме:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

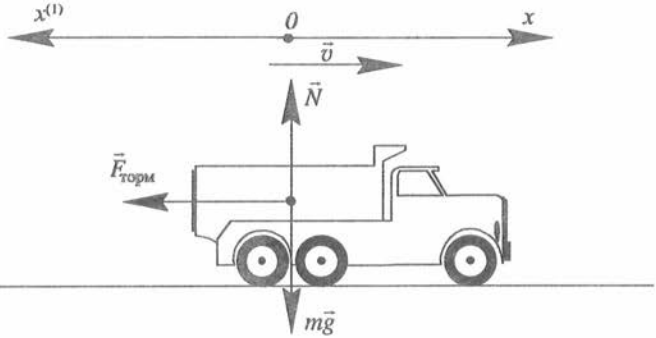


Рис. 41

и проектируем его на ось, направленную вертикально вниз:

$$mg - N = ma.$$

Решая это уравнение, находим N = 120 Н. Согласно третьему закону Ньютона, с такой же (по модулю) силой ящик действует на дно лифта: $|N^{(1)}| = N = 120$ Н.

5. Автомашина массой 3 тонны, двигавшаяся со скоростью 12 м/с, начала тормозить и остановилась за 10 с. Каково было ускорение машины и какова была величина тормозящей силы?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 41) и сначала применяем формулу равноускоренного движения $v = v_0 + at$, где конечная скорость $v = 0$. Отсюда $a = -\frac{v_0}{t}$; $a = -1{,}2$ м/с^2 (координатная ось x была направлена в сторону движения машины, т. е. вправо). При пользовании вторым законом Ньютона удобно координатную ось направлять туда, куда направлено ускорение, т. е. влево (ось $x^{(1)}$ на рисунке). Тогда $a = +1{,}2$ м/с^2. Написав в векторной форме второй закон Ньютона

$$\vec{F}_{\text{торм}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

и спроектировав уравнение на ось $x^{(1)}$ (направленную влево), получаем $F_{\text{торм}} = ma$; $F_{\text{торм}} = 3000 \cdot 1{,}2 = 3600$ Н.

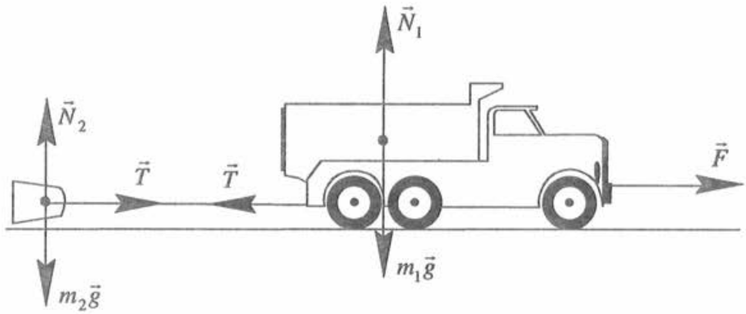


Рис. 42

6. К игрушечному грузовику массой 995 г привязали длинной ниткой наперсток массой 5 г. Грузовик стали тянуть горизонтальной силой 20 Н. С какой силой натянута нить, соединяющая грузовик с наперстком? Трение не учитывать.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 42) и показываем на нем все силы, действующие на грузовик и на наперсток. Силы T, с которыми обе половины нити действуют друг на друга, равны по модулю, согласно третьему закону Ньютона. Применим к грузовику и к наперстку второй закон Ньютона. Можно соответствующие векторные уравнения не записывать, а записать проекции этих уравнений на горизонтальную ось:

$$\begin{cases} F - T = m_1 a, \\ T = m_2 a. \end{cases}$$

Мы получили два уравнения с двумя неизвестными. Чтобы решить систему, можно из второго уравнения выразить a и подставить это выражение в первое уравнение. Еще проще разделить одно уравнение на другое: $\dfrac{F - T}{T} = \dfrac{m_1}{m_2}$.

Решая это уравнение относительно T, получаем $T = \dfrac{Fm_2}{m_1 + m_2}$; $T = \dfrac{20 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0{,}995 + 0{,}005} = 0{,}1$ Н.

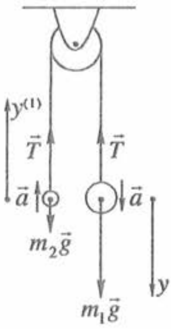


Рис. 43

7. Через неподвижный блок перекинута нить, к одному концу которой подвешена гиря 9 кг, а к другому — 1 кг (рис. 43). С каким ускорением движутся гири и с какой силой натянута нить?

Решение. Из курса 7 класса известно, что неподвижный блок не дает выигрыша в силе. Значит, натяжение нити T одинаково по обе стороны блока. Показываем на чертеже силы, действующие на каждую гирю. У тяжелой гири ускорение направлено вниз, значит, ее сила тяжести больше (по модулю) T. У легкой ускорение направлено вверх, значит ее сила тяжести меньше T. Составляем в уме векторные уравнения движения и записываем их проекции, причем для тяжелой гири координатную ось направляем вниз, а для легкой — вверх (т. е. в ту сторону, куда направлено ускорение каждой гири). Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1g - T = m_1a, \\ T - m_2g = m_2a \end{cases}$$

(ускорения обеих гирь, очевидно, одинаковы по абсолютной величине). Решая эту систему, получаем $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$; $T = \dfrac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$, откуда $a = 8$ м/с^2, $T = 18$ Н.

§ 31. Задачи

1. Покоящуюся вагонетку массой 200 кг стали тянуть с горизонтальной силой $F = 400$ Н. Сила трения, препятствующая движению, $F_{тр} = 20$ Н. С каким ускорением будет двигаться вагонетка, какова будет ее скорость через 10 с и какой путь пройдет она за это время?

Указание. См. рис. 44. (Ответ: 1,9 м/с^2; 19 м/с; 95 м).

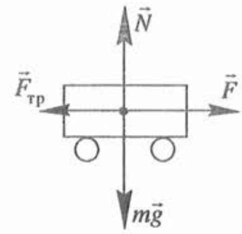


Рис. 44

2. Гирю массой 2 кг тянут посредством привязанной к ней веревки вертикально вверх с силой 50 Н. С каким ускорением движется гиря и какой путь пройдет она за 4 с? (О т в е т: 1,5 м/с^2; 12 м).

3. Пуля массой 10 г вылетает из ружья со скоростью 600 м/с. С какой силой пороховые газы толкали пулю, если длина ствола равна 1,2 м? Движение в стволе считать равноускоренным.

У к а з а н и е. Сначала рассчитайте ускорение, с которым пуля двигалась в стволе, затем найдите искомую силу по второму закону Ньютона. (О т в е т: 1500 Н).

4. Ракета начала двигаться с поверхности Земли вертикально вверх с ускорением 110 м/с^2. На дне ракеты лежит ящик массой 20 кг. Рассчитайте силу, с которой ящик давит на дно ракеты, и определите, во сколько раз эта сила больше силы тяжести ящика. (О т в е т: 2400 Н; в 12 раз).

5. С каким ускорением опускается лифт, если ящик массой 20 кг, лежащий на дне лифта, давит на дно с силой 140 Н? (О т в е т: 3 м/с^2).

6. Две одинаковые вагонетки сцеплены друг с другом. Первую вагонетку тянут горизонтально с силой F. С какой силой натянута сцепка? Трение не учитывать.

У к а з а н и е. См. решение задачи № 6 из предыдущего параграфа. Считайте, что масса каждой вагонетки известна и равна m. (О т в е т: $F/2$).

7. Две гири массами 3 кг и 2 кг висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Вначале гири были неподвижны и находились на одной высоте. С каким ускорением будут они двигаться и через какое время легкая гиря окажется на 32 см выше нижней? (О т в е т: 2 м/с^2; 0,4 с).

У к а з а н и е. См. решение задачи № 7 из предыдущего параграфа.

8. На столе стоит тележка массой 4 кг, к концу которой привязана нить, перекинутая через неподвижный блок, установленный на краю стола. К свешивающемуся концу нити

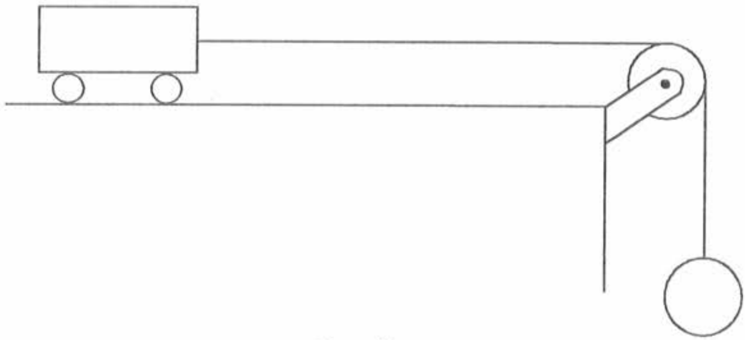


Рис. 45

подвешена гиря массой 1 кг (рис. 45). С каким ускорением все это движется? Трение не учитывать.

У к а з а н и е. Неподвижный блок не дает выигрыша в силе, так что натяжение нити T всюду одинаково. (О т в е т: 2 м/с^2).

9. Решите предыдущую задачу при условии, что на тележку действует сила трения, равная 4 Н. (О т в е т: 1,2 м/с^2).

§ 32. Закон Гука

1. Рассмотрим подробнее деформацию растяжения и сжатия. При растяжении (а также при сжатии) пружины возникает упругая сила, пропорциональная величине деформации (т. е. величине растяжения или сжатия). Запишем этот закон в виде формулы. Предположим, левый конец пружины мы закрепили (рис. 46), а правый стали растягивать. Пусть правый конец пружины переместили вправо на величину x. Возникнет упругая сила, направленная влево. Проекции этих двух векторов (вектора перемещения и вектора упругой силы) противоположны по знаку. Поэтому математическая зависимость между этими двумя величинами выражается формулой

$$F_{\text{упр}} = -kx.$$

Закон, выражаемый этой формулой, называется законом Гука. Коэффициент пропорциональности k называют жесткостью пружины. Жесткость зависит от материала, из которого изготовлена проволока, от толщины проволоки и от размеров пружины.

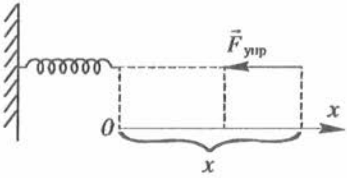


Рис. 46

2. Опыт показывает, что если растягивать или сжимать не пружину, а стальной стержень, то, хотя деформации будут много меньше, чем у пружин (при тех же приложенных силах), к ним также применим закон Гука. Этот закон применим только при малых (по сравнению с длиной стержня) деформациях. Сформулировать закон Гука можно так. При малых деформациях сила упругости пропорциональна величине деформации и направлена в сторону, противоположную перемещению конца тела.

Упр. 1. В каких единицах измеряется в СИ жесткость пружины (или тела)?

Упр. 2. Гиря массой m подвешена к пружине с жесткостью k. Чему равно удлинение пружины?

Указание. Учащиеся часто ошибаются в знаке, когда проектируют силу упругости на ось координат. Если сила упругости направлена в ту же сторону, куда направлена ось координат, то ее проекция на ось равна $+kx$, а не $-kx$, если под x подразумевают абсолютное значение деформации. (Ответ: $x = \frac{mg}{k}$).

Упр. 3. К гире массой m = 1 кг привязали снизу пружину и потянули за нее вниз так, что гиря стала падать с ускорением a = 16 м/с^2. Чему равно удлинение пружины, если жесткость ее k = 500 Н/м (см. указание к предыдущему упражнению)? (Ответ: 1,2 см).

§ 33. Сила трения

1. Существуют три вида трения: трение покоя, трение скольжения и трение качения. Сначала займемся трением покоя. Предположим, на полу лежит тяжелый ящик, и мы

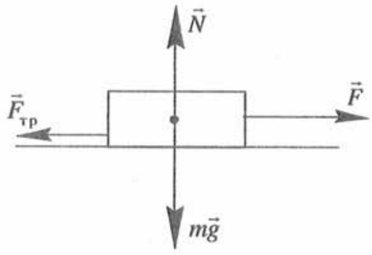


Рис. 47

прикладываем к нему небольшую горизонтальную силу, например, 5 Н. Ящик не сдвинется с места. Стало быть, сила тяги уравновешивается силой, действующей на нижнюю поверхность ящика[1] (рис. 47). Это и есть сила трения. Поскольку ящик остается в покое, эта сила называется трением покоя.

Если силу тяги несколько увеличить, например, с 5 до 10 Н, то ящик по-прежнему останется в покое. Следовательно, сила трения покоя возросла с 5 до 10 Н. При дальнейшем увеличении силы тяги ящик сначала остается в покое, но при некоторой силе, например, 40 Н начинает скользить по полу. Таким образом, в зависимости от величины внешней силы сила трения покоя может принимать любые значения — от нуля до некоторого максимального значения, за которым наблюдается скольжение. Обычно под силой трения покоя понимают именно это максимальное значение.

2. При дальнейшем увеличении силы тяги сила трения приблизительно остается постоянной. Эта сила называется силой трения скольжения. Сила трения скольжения несколько меньше максимальной силы трения покоя, но мы будем этим различием пренебрегать.

3. Опыт показывает, что если силу, с которой ящик прижимается к полу, увеличить в несколько раз, то во столько же раз увеличится сила трения. Но по третьему закону Ньютона сила, с которой ящик давит на пол, равна силе, с которой пол действует на ящик. Сила, с которой

[1] Строго говоря, если две силы не направлены вдоль одной прямой, они не могут уравновеситься. Можно сказать, что уравновесятся проекции этих сил на горизонтальную ось. Оказывается, в этом случае ящик будет в равновесии, так как если учесть отдельно реакцию опоры, действующую на переднюю и заднюю части ящика (они будут неодинаковыми), и силу тяжести, то равнодействующая всех сил, приложенных к ящику, будет равна нулю.

опора действует на тело, называется реакцией опоры. Таким образом, сила трения пропорциональна реакции опоры N:

$$F_{тр} = \mu N.$$

Коэффициент μ называется коэффициентом трения. Его величина зависит от материала соприкасающихся поверхностей (дерево по дереву, сталь по льду, сталь по стали и т. д.). Этот коэффициент мы будем считать одинаковым для трения покоя (максимального) и трения скольжения. При смазке трущихся поверхностей (обычно тонким слоем минерального масла) коэффициент трения во много раз уменьшается.

4. Трение в машинах часто мешает их работе: ведет к износу деталей и к бесполезной затрате энергии. Но, с другой стороны, при отсутствии трения многие машины не могли бы работать. Транспорт не мог бы двигаться, а гайки отвинчивались бы от болтов при любом толчке. Вся наша жизнь была бы невозможной, если бы не было трения. Мы не могли бы ходить, предметы не могли бы оставаться на своих местах: малейший толчок приводил бы их в движение. Мы ничего не могли бы удержать в руках — предметы выскальзывали бы из них, как мокрый кусок мыла.

5. Если круглое тело катится по поверхности, то и в этом случае возникает сила, мешающая движению. Эта сила называется трением качения. Сила трения качения во много раз меньше силы трения скольжения (например, при качении стальных колес по рельсам трение качения почти в 100 раз меньше трения скольжения этих же поверхностей). Поэтому в машинах стремятся заменить трение скольжения трением качения (например, применяя шариковые подшипники).

6. Возникновение трения скольжения иногда пытаются объяснить наличием шероховатостей, которые цепляются друг за друга и мешают движению тел. Однако опыт противоречит этому утверждению. Если слегка сгладить шероховатости, то сила трения несколько уменьшится, но если хорошо отполировать обе поверхности, то трение становится больше, чем до полировки. Механизм возникновения трения скольжения еще не разгадан полностью.

Упр. 1. Один раз кирпич тянули, поставив его на ребро, другой раз — положив его плашмя. Одинакова ли будет сила трения в обоих случаях?

У к а з а н и е. Применить формулу для расчета силы трения.

§ 34. Примеры решения задач

1. Тележку массой 200 кг тянут горизонтально с силой 90 Н. С каким ускорением движется тележка, если коэффициент трения равен 0,055?

Р е ш е н и е. Делаем рисунок и показываем на нем все силы, действующие на тележку (рис. 44). Для решения используем две формулы: формулу силы трения и второй закон Ньютона

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \tag{1}$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{mp} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Одну ось координат направляем горизонтально (туда, куда направлено ускорение), другую — вертикально. Проектируя векторное равенство на эти оси, получаем:

$$F - F_{\text{тр}} = ma, \tag{2а}$$

$$N - mg = 0. \tag{2б}$$

Из последнего уравнения находим $N = mg$. Теперь можно найти силу трения: $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$. Подставив это в уравнение (2а), получаем уравнение с одним неизвестным:

$$F - \mu mg = ma,$$

отсюда $a = \dfrac{F - \mu mg}{m}$; $a = \dfrac{90 - 0{,}005 \cdot 200 \cdot 10}{200} = 0{,}4$ м/с².

2. С какой силой надо горизонтально тянуть санки массой (вместе с грузом) 40 кг, чтобы они двигались равномерно? Коэффициент трения железных полозьев о лед равен 0,02.

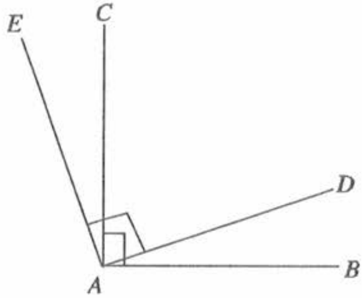


Рис. 48

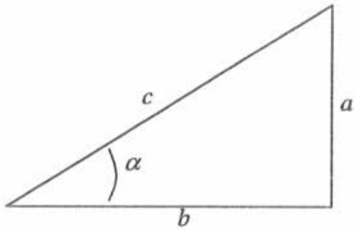


Рис. 49

Р е ш е н и е. Делаем рисунок и проставляем на нем все силы, действующие на санки (наподобие рис. 44). Для решения используем две формулы: формулу силы трения и второй закон Ньютона:

$$F_{тр} = \mu N,$$
$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = 0\,.$$

Проектируя векторное равенство на оси координат, одна из которых направлена горизонтально, а другая — вертикально, получаем:

$$F - F_{тр} = 0,$$
$$N - mg = 0.$$

Из последнего уравнения получаем $N = mg$, следовательно, $F_{тр} = \mu N = \mu mg$. Теперь можно найти $F = F_{тр} = \mu mg$.

3. Докажите, что если две стороны одного угла соответственно перпендикулярны двум сторонам другого, то эти углы равны[1]. Например (см. рис. 48), если $AB \perp AC$, а $AD \perp AE$, то $\angle BAD = \angle CAE$.

4. Известна величина гипотенузы c прямоугольного треугольника и угол α (рис. 49), а стало быть известны значения синуса и косинуса этого угла. Найдите величину противолежащего катета a и прилежащего b.

---

[1] Пока не усвоены решения примеров по геометрии 3, 4, 5, нельзя приступать к решению примера 6 и к другим задачам о движении по наклонной плоскости.

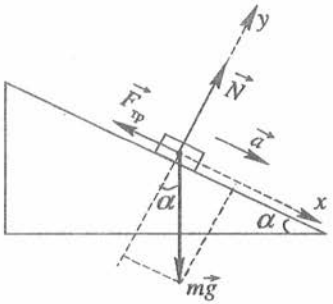


Рис. 50

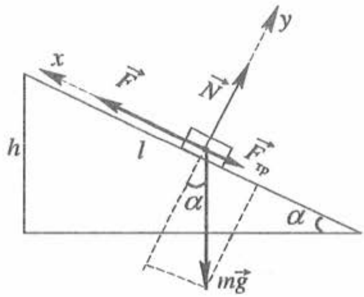


Рис. 51

5. Известен $\sin\alpha$. Найдите $\cos\alpha$.

Указание. Используйте равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

6. По наклонной плоскости с углом α движется вниз брусок массой m. Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ. Найти ускорение бруска.

Решение. Делаем чертеж (рис. 50) и показываем на нем силы, действующие на брусок. Этих сил три: сила тяжести mg, сила реакции опоры (сила упругости) N и сила трения $F_{тр}$. Благодаря силе тяжести брусок прижимается к наклонной плоскости, так что он может двигаться только вдоль плоскости. Стало быть, ускорение бруска будет направлено вдоль плоскости. Второй закон Ньютона в векторной форме записывается так:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a}.$$

Кроме того, $F_{тр} = \mu N$.

Одну координатную ось направим туда, куда направлено ускорение, т. е. параллельно наклонной плоскости, другую ось — перпендикулярно к ней. Легко видеть, что угол между вектором $m\vec{g}$ и осью y (ее отрицательным направлением) равен углу α между наклонной плоскостью и горизонтальным направлением (докажите это сами, пользуясь теоремой, изложенной в примере 3).

Проектируя векторное уравнение на оси x и y, получаем

$$mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma, \qquad (1)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Из второго уравнения находим $N = mg\cos\alpha$, откуда $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Подставляя это в первое уравнение, получаем $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Оказывается, масса тела была лишним данным в условии.

7. По наклонной плоскости высотой $h = 3$ м и длиной $l = 5$ м тянут вверх ящик массой $m = 50$ кг. Коэффициент трения $\mu = 0{,}3$. С какой силой, параллельной наклонной плоскости, надо тянуть за ящик, чтобы он двигался равномерно?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж и показываем на нем все силы, действующие на ящик (рис. 51). Хотя угол α наклона не дан в условии, мы "своей властью" вводим его, но помним, что в конечном ответе этот угол не должен фигурировать.

Второй закон Ньютона записывается так:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{mp} = 0.$$

Кроме того, $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Направим ось x параллельно наклонной плоскости, а ось y перпендикулярно к ней и спроектируем на эти оси векторное уравнение. Получим:

$$F - mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \qquad (1)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Из второго уравнения находим $N = mg\cos\alpha$, откуда $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.

Подставляя это в первое уравнение, получаем

$$F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = 0 \Rightarrow mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Теперь остается подставить вместо $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, а вместо $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{h}{l}\right)^2} = \frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}$, в результате получаем $F_{\text{т}} = \frac{mg}{l}\left(h + \mu\sqrt{l^2-h^2}\right)$.

Подставляя числа, находим

$$F = \frac{50 \cdot 10}{5}\left(3 + 0{,}3\sqrt{5^2 - 3^2}\right) = 420 \text{ Н}.$$

§ 35. Задачи[1]

1. С какой горизонтальной силой надо тянуть по полу ящик массой 20 кг, чтобы он двигался с ускорением 4 м/с^2? Коэффициент трения равен 0,3. (О т в е т: 140 Н).

2. На наклонной плоскости, угол наклона которой равен α, находится брусок массой m. С какой силой, направленной вдоль наклонной плоскости, надо тянуть его вверх, чтобы он двигался с ускорением a? Коэффициент трения равен μ. (О т в е т: $mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$).

3. По наклонной плоскости высотой h = 3 м и длиной l = 5 м скользит с вершины брусок. Какую скорость будет иметь брусок в самой нижней точке, если вначале он покоился, а коэффициент трения μ = 0,2?

У к а з а н и е. Сначала надо найти ускорение бруска. Для этого сначала будем считать известной массу бруска m и угол α наклона плоскости; в полученном ответе подставить $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}$. Когда ускорение будет найдено, применить формулу равноускоренного движения.

(О т в е т: $\sqrt{2g\left(h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right)}$ = 6,6 м/с).

4. Докажите, что если брусок равномерно скатывается с наклонной плоскости, то коэффициент трения $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ (где α — угол наклона плоскости к горизонту).

5. Автомобиль массой 4 т движется в гору с ускорением 0,2 м/с^2. Найти силу тяги, если уклон равен 0,02, а коэф-

---

[1] Ускорение свободного падения во всех задачах считать равным 10 м/с^2.

фициент трения 0,04. (Уклон равен синусу угла наклона α плоскости к горизонту: $\sin\alpha = \frac{h}{l}$).

(О т в е т: $m(a + g(\sin\alpha + \mu)) = 3200$ Н).

6. На наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонтом, лежит брусок массой $m = 2$ кг. Коэффициент трения равен 0,2. При таком коэффициенте брусок начинает соскальзывать с плоскости. С какой силой, перпендикулярной к плоскости, надо прижать брусок к плоскости, чтобы он был в равновесии?

(О т в е т: $mg\left(\frac{\sin\alpha}{\mu} - \cos\alpha\right) = 37$ Н).

7. С высоты h начало свободно падать тело. Одновременно другое тело начало скользить без трения из состояния покоя с наклонной плоскости такой же высоты. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Во сколько раз время движения (до низа) второго тела больше, чем первого? (О т в е т: в 2 раза).

§ 36. Сопротивление среды

1. При движении тела в жидкости или газе на него действует сила, мешающая движению. Это сопротивление движению может вызываться несколькими причинами. Одна из них связана с тем, что ближайший к телу тонкий слой жидкости прилипает к поверхности тела и движется с ним как одно целое, увлекая из-за трения последующие слои. Согласно третьему закону Ньютона, с какой силой данный слой увлекает следующий, с такой же силой этот следующий слой тормозит движение данного слоя. Свойство жидкостей и газов оказывать сопротивление перемещению слоев друг относительно друга называется вязкостью. У жидкостей вязкость во много раз больше, чем у газов, например, у воды она много больше, чем у воздуха. У меда вязкость еще больше. При небольших скоростях вязкость среды является единственной причиной возникновения сопротивления движению. Эта сила сопротивления пропорциональна скорости тела.

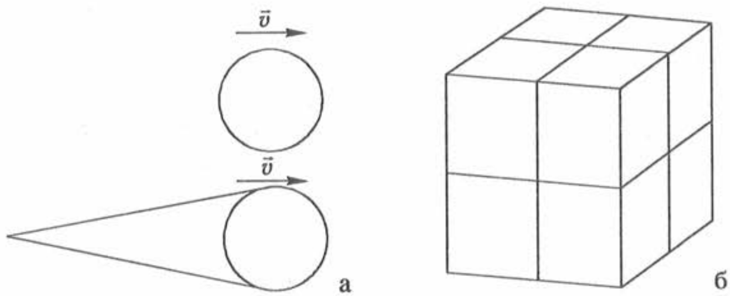


Рис. 52

2. При больших скоростях возникает дополнительная причина, мешающая движению тела. Позади движущегося тела возникает область пониженного давления (напоминаем, что давлением $p = \dfrac{F}{S}$ называется сила, действующая на единицу площади). Величина возникшей разности давлений зависит от площади поперечного сечения тела (чем больше эта площадь, тем больше сопротивление), от его скорости и от формы. Например, если к шару добавить сзади конус, как показано на рис. 52а, то "сопротивление давления" уменьшится в 5 раз! Форму тела, при которой сопротивление среды наименьшее, называют обтекаемой. Самолетам, автомашинам, подводным лодкам и другим телам, движущимся с большими скоростями в воздухе или в воде, стараются придать обтекаемую форму. Наличие выступов или шероховатостей резко увеличивает сопротивление. У обтекаемого тела не должно быть выступающих частей и неровностей.

Сопротивление движения при больших скоростях пропорционально квадрату скорости тела.

3. Из-за того, что сила сопротивления среды резко увеличивается с ростом скорости, скорости самолетов, теплоходов и т.п. не растут безгранично, несмотря на действие "силы тяги". Предположим, что сила тяги теплохода постоянна. Когда теплоход начинает набирать скорость, сила сопротивления много меньше силы тяги. Поэтому теплоход движется ускоренно, его скорость растет. Но с ростом скорости растет и сила сопротивления, и в конце концов она сравняется с силой тяги. После этого скорость теплохода перестанет расти, он станет двигаться с постоянной скоростью.

Этот вывод относится и к падению тел. Если тело (например, капля дождя) падает с большой высоты, то в конце концов оно достигает такой скорости, при которой сопротивление воздуха становится равным силе тяжести тела. После этого движение становится равномерным.

4. Сила тяжести действует на все частицы тела, а сопротивление воздуха только на те частицы, которые лежат на поверхности. Поэтому, если тело раздробить, например, кирпич превратить в облако пыли, то сопротивление резко возрастет, и уже при малой скорости движение станет равномерным. Отсюда видно, что малые тела (пылинки) падают медленнее больших (кирпичей), если плотность тех и других одинакова. Этот факт можно объяснить еще так. Чем меньше размеры тела, тем большая поверхность приходится на единицу объема. Например, если уменьшить ребро куба вдвое, то его объем (а стало быть, и вес) уменьшится в 8 раз, а поверхность — только в 4 раза (рис. 52б). Таким образом, с уменьшением размеров тела сила сопротивления начинает играть более существенную роль: она становится заметной при меньших скоростях, и тело достигает меньшей предельной скорости.

Мелкие частицы не всегда достигают земли. Например, пылинки или мелкие капельки воды, образующие туман, могут часами носиться в воздухе, не падая. В спокойном воздухе они всегда достигали бы земли, но воздух никогда не бывает спокойным (в основном из-за того, что в разных местах он нагрет по-разному). Даже при неощутимом ветре скорость воздуха больше предельной скорости этих частиц (для капелек тумана предельная скорость меньше миллиметра в секунду). Частицы становятся игрушками воздушных струй и движутся туда, куда уносит их в данный момент поток воздуха.

Упр. 1. С балкона высотного дома уронили моток шерсти. Одинаковым ли будет ускорение мотка возле балкона и у самой поверхности земли?

Упр. 2. Теплоход начал двигаться из состояния покоя, создавая постоянную силу тяги. Как будет с течением времени меняться ускорение и скорость его движения: увеличиваться или уменьшаться?

Упр. 3. Из пистолета выстрелили вертикально вверх. Считая, что сила тяжести пули — величина постоянная (не зависит от высоты), ответьте, одинаковым ли будет ускорение пули в нижней точке (сразу после выстрела) и в самой верхней точке траектории, если: а) пуля летит в вакууме; б) пуля летит в воздухе.

Упр. 4. Объясните, почему возле быстро идущего поезда возникает ветер.

Упр. 5. Вам дали стакан с водой. Придумайте опыт, демонстрирующий, что вода обладает определенной вязкостью.

§ 37. Разные задачи на применение законов Ньютона

1. Железный шарик притягивается к магниту. Будет ли его движение равноускоренным?

2. На листе бумаги, лежащем на столе, лежит коробка спичек. Коэффициент трения между коробкой и листом равен 0,2. С каким ускорением надо двигать горизонтально лист, чтобы коробка соскользнула с него?

У к а з а н и е. Вопрос можно сформулировать так: какое наибольшее ускорение может сообщить коробке сила трения покоя? (О т в е т: $a = 2$ м/с^2).

3. Ящик массой 20 кг лежит на полу. Коэффициент трения равен 0,2. Изобразите графически зависимость силы трения от горизонтальной силы тяги, приложенной к ящику.

4. Две лодки соединены веревкой, с помощью которой их подтягивают друг к другу с постоянной силой. Масса первой лодки 300 кг, второй — 100 кг. Первая лодка прошла до встречи путь 20 м. Какой путь прошла вторая лодка? Сопротивление воды не учитывать.

5. Ящик массой m движется по полу с ускорением a под действием некоторой силы F, образующей с полом угол α

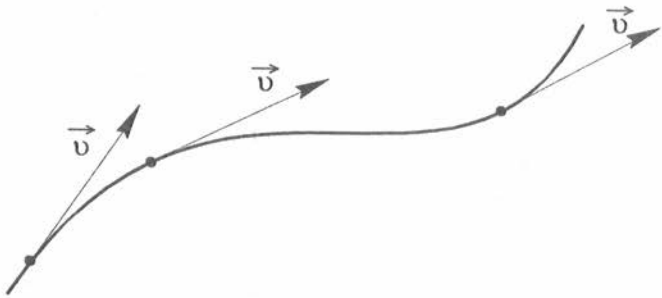


Рис. 53

(вверх от пола). Определите величину этой силы, если коэффициент трения равен μ. (О т в е т: $\dfrac{m(a + \mu g)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$).

Г Л А В А 5

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 38. Направление скорости при криволинейном движении

1. При прямолинейном движении направление скорости совпадает с направлением перемещения, т. е. совпадает с траекторией движения. Чтобы узнать направление скорости при криволинейном движении, следует выбрать настолько малый промежуток времени, чтобы в течение него можно было считать отрезок траектории прямолинейным. Направление такого участка практически не отличается от направления касательной (чем меньше отрезок, тем меньше это отличие). Таким образом, за направление скорости принимают направление касательной к траектории в рассматриваемой точке (рис. 53).

Большинство наших определений не являются вполне произвольными. Они должны согласовываться с установленными нами законами природы. Это относится и к опреде-

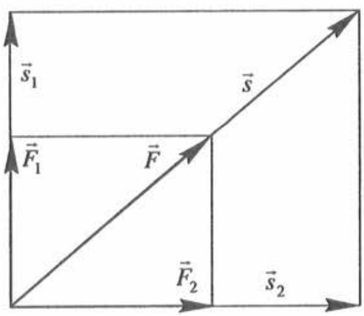


Рис. 54

лению скорости. Опыт показывает, что раскаленные частицы, отрывающиеся от вращающегося точильного камня, когда к нему прижимают стальную полоску, летят в виде искр по касательной. Значит, их скорость в момент отрыва (в соответствии с первым законом Ньютона) была направлена по касательной. Это соответствует данному нами определению.

§ 39. Принцип независимости действия сил

1. Если на тело одновременно действует несколько постоянных сил, то перемещение тела будет таким же, как если бы эти силы действовали поочередно. Это утверждение называют принципом независимости действия сил (или принципом независимости движений). Рассмотрим его на таком примере. Пусть на неподвижное тело массы m одновременно действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, перпендикулярные друг другу (рис. 54). Если сначала действовала только сила F_1, то за время t перемещение тела равнялось бы $s_1 = a_1\frac{t^2}{2} = \frac{F_1}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$. Если после этого будет действовать только сила F_2, то перемещение будет $s_2 = a_2\frac{t^2}{2} = \frac{F_2}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$.

Результирующее перемещение

$$s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{\left(\frac{F_1}{m}\cdot\frac{t^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{m}\cdot\frac{t^2}{2}\right)^2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\cdot\frac{t^2}{2m}.$$

Если обе силы действуют одновременно, то, чтобы найти перемещение тела, можно сначала найти равнодействующую обеих сил. Она равна $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

Отсюда $s = a\frac{t^2}{2} = \frac{F}{m}\cdot\frac{t^2}{2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\cdot\frac{t^2}{2m}$. Мы получили тот же результат. Таким образом, когда мы при сложении сил пользуемся правилом параллелограмма, мы автоматически учитываем принцип независимости действия сил.

Если в разных точках пространства каждая из сил, действующих на тело, (или хотя бы одна из них) принимает различные значения, то применять "поочередное включение" сил можно только при малых перемещениях. В противном случае может случиться, что после перемещения тела под действием одной из сил в другую область пространства другая сила совсем исчезнет (или заметно изменится). В этом случае действие этой другой силы никак не будет учтено (или будет учтено неверно).

§ 40. Движение тела, брошенного горизонтально

1. Пусть тело брошено горизонтально со скоростью v_0. Надо узнать, каковы будут координаты этого тела в произвольный момент t и какова будет его скорость в этот момент, если не учитывать сопротивление воздуха. Начало координат 0 поместим в точку, откуда брошено тело, ось x направим по направлению начальной скорости, а ось y — вертикально вниз (рис. 55).

Брошенное тело совершает как бы два движения: оно одновременно перемещается по горизонтали и по вертикали. Применим принцип независимости движений, который утверждает, что тело в момент t попадет в ту же точку, куда попало бы, если бы оба движения совершались не одновременно, а поочередно. Предположим, что мы сумели "выключить" силу тяжести. Тогда брошенное тело двигалось бы прямолинейно и равномерно, и его перемещение равнялось бы $s_1 = v_0t$. Теперь предположим, что мы остановили тело и "включили" силу тяжести. Тело начало бы свободно падать и за время t переместилось бы на $s_2 = \frac{gt^2}{2}$. В эту точку (с координатами $x = v_0t$, $y = \frac{gt^2}{2}$) и попадет в момент t брошенное тело.

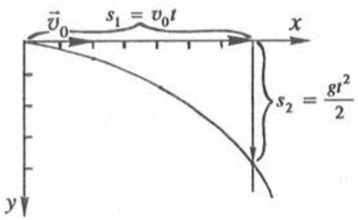


Рис. 55

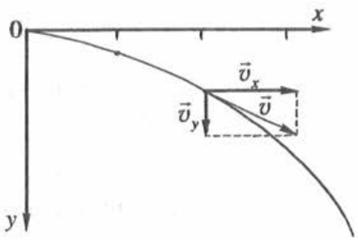


Рис. 56

2. Найдем уравнение траектории тела, брошенного горизонтально, т. е. зависимость y от x. Для этого выпишем уравнения $x(t)$ и $y(t)$ и исключим из этой системы t.

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} t = \frac{x}{v_0};\; y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Из курса математики известно, что уравнение вида $y = kx^2$ описывает параболу. Значит, траектория тела, брошенного горизонтально, является параболой.

3. Чтобы найти скорость в момент t, снова используем принцип независимости движений. Если бы сила тяжести была “выключена”, то тело двигалось бы по инерции прямолинейно и равномерно, так что его скорость в любой момент равнялась бы начальной: $v_x = v_0$. Если теперь тело остановить и дать возможность свободно падать, то его скорость в момент t будет равняться $v_y = gt$. Истинная скорость тела будет векторной суммой этих скоростей $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, и модуль скорости будет равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ (рис. 56).

§ 41. Примеры решения задач

1. Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Построить по точкам траекторию его движения за 4 с.

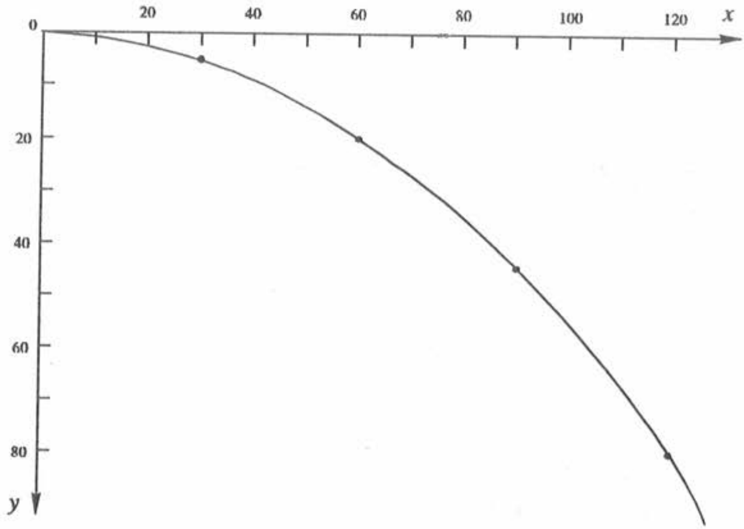


Рис. 57

Р е ш е н и е. Строим оси координат. Их начало помещаем в точке, откуда брошено тело, ось x направляем туда, куда направлена начальная скорость, а ось y — вертикально вниз.

Вычисляем координаты тела в моменты, указанные в таблице. Для этого рассчитаем, какова была бы горизонтальная координата тела, если силы тяжести не было бы (данные заносим во вторую строку таблицы), и какова была бы его вертикальная координата, если бы оно свободно падало без толчка (данные заносим в третью строку).

t, с	0	1	2	3	4
$x = v_0 t$, м	0	30	60	90	120
$y = \frac{gt^2}{2}$, м	0	5	20	45	80

Координаты брошенного тела будут точно такими же, как указано в таблице. Выбираем масштаб, проставляем

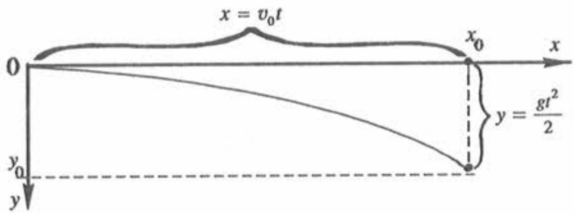


Рис. 58

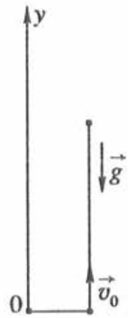


Рис. 59

соответствующие точки на графике и строим по ним кривую (рис. 57).

2. Пуля, вылетевшая из горизонтально расположенного ружья со скоростью 700 м/с, попала в мишень, удаленную на 70 м от точки вылета пули. На сколько снизится пуля по вертикали за время полета? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Делаем схематичный чертеж (рис. 58), отмечаем на нем координаты пули в момент попадания в мишень и формулы, по которым они вычисляются. Из формулы $x = v_0 t$ находим время полета: $t_0 = \frac{x_0}{v_0}$; $t_0 = \frac{70}{700} = 0{,}1$ с. Найденное время подставляем в формулу $y = \frac{gt^2}{2}$; $y = \frac{10 \cdot 0{,}1^2}{2} = 0{,}05$ м = 5 см. Эту задачу (как и другие) предпочтительнее решать сначала “в буквах”, т. е. сначала получить ответ в форме $y = \frac{g}{2}\left(\frac{x_0}{v_0}\right)^2$ и лишь потом подставлять числа.

§ 42. Задачи

1. Одно тело брошено горизонтально со скоростью $v_1 = 20$ м/с, другое — со скоростью $v_2 = 40$ м/с. Постройте на развернутом тетрадном листе траектории обоих тел (в одних и тех же координатных осях) за 5 с. Масштаб: 1 см — 10 м.

2. Какова дальность полета (по горизонтали) мячика, брошенного горизонтально со скоростью $v_0 = 15$ м/с с балкона, расположенного на высоте 20 м? Какова скорость мяча в момент удара о землю?

Указание. Сначала найдите время полета мяча по формуле $y = \frac{gt^2}{2}$, где $y = 20$ м. (Ответ: 30 м; 25 м/с).

3. Один шарик столкнули с края стола, сообщив ему определенную горизонтальную скорость, а другому дали свободно падать (без толчка) с той же высоты. Одновременно ли упадут оба шарика на пол?

§ 43. Движение тела, брошенного вертикально вверх

1. Это движение, разумеется, прямолинейное, но удобно рассмотреть его здесь перед тем, как рассмотреть движение тела, брошенного под произвольным углом к горизонту.

Если сопротивление воздуха не учитывать, то на брошенное вверх тело действует (после броска) одна-единственная сила — сила тяжести, направленная вниз. Куда направлена сила, туда, согласно второму закону Ньютона, направлено и ускорение. Направив координатную ось вертикально вверх (рис. 59) и применив к этому случаю формулы равноускоренного движения (§ 10), получим:

$$v = v_0 - gt, \tag{1}$$

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Под символом g мы будем подразумевать положительное число, т. е. абсолютное значение ускорения свободного падения. По приведенным формулам можно найти координату тела и его скорость в любой момент t, если дана его начальная скорость v_0.

2. Решим еще такую задачу. Пусть дана начальная скорость брошенного вверх тела и надо найти время подъема

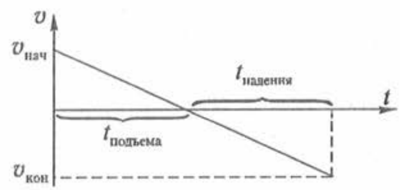


Рис. 60

до наивысшей точки и высоту этого подъема. Поскольку в наивысшей точке скорость v обращается в нуль, из уравнения (1) получаем:

$$0 = v_0 - gt_{\max} \Rightarrow t_{\max} = \frac{v_0}{g}.$$

Подставляя это время в уравнение (2), найдем максимальную высоту подъема.

3. Построим график $v(t)$ для брошенного вверх тела (рис. 60). В наивысшей точке скорость обращается в нуль, после чего ее направление меняется на противоположное, так что ее проекция становится отрицательной (нижняя часть графика). Известно, что пройденный путь выражается площадью под графиком скорости, а так как путь, пройденный при падении, такой же, как при подъеме, то верхний и нижний треугольники на рис. 60 равновелики. Легко видеть, что они еще и подобны, а раз так, то эти треугольники равны. Равенство горизонтальных катетов означает, что время падения равно времени подъема, а равенство вертикальных — что конечная скорость падения равна начальной скорости бросания.

§ 44. Задачи

1. Стрела, выпущенная вертикально вверх со скоростью 40 м/с, попала в цель через 2 с. На какой высоте находилась цель и какова была скорость стрелы при попадании ее в цель?

2. Тело, брошенное вертикально вверх, упало обратно через 6 с после броска. Какой максимальной высоты достигло тело и с какой скоростью оно брошено?

Указание. Половину этого времени тело свободно падало с нулевой начальной скоростью.

3. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через какое время оно упадет обратно? Решите задачу двумя способами: а) в уравнение (2) подставьте $h = 0$; б) найдите время подъема и удвойте его.

4. С балкона, находящегося на высоте $h_0 = 25$ м, бросили вертикально вверх мяч со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Напишите уравнение координаты мяча в зависимости от времени: а) направив координатную ось вверх и выбрав за начало отсчета точку бросания; б) выбрав за начало отсчета поверхность земли; в) направив координатную ось вниз и выбрав за начало отсчета точку бросания; г) выбрав за начало отсчета поверхность земли (ось по-прежнему направив вниз). После этого рассчитайте по каждой из формул координату мяча h через 2 с и проверьте, что полученные ответы не противоречат друг другу. (О т в е т на пункт "г": $h = -25 - 20t + \frac{10t^2}{2}$; -45 м).

5. Из двух точек, расположенных по вертикали на расстоянии $l = 100$ м друг от друга, бросают одновременно два тела с одинаковой по абсолютной величине скоростью 10 м/с; из нижней точки вверх, а из верхней — вниз. Через какое время и на какой высоте они встретятся? (О т в е т: 5 с; на 75 м ниже нижней точки).

6. Чтобы облегчить восприятие обозначений следующих двух параграфов, решите такую задачу. Тело брошено с земли вертикально вверх с начальной скоростью v_{0y}.

а) Какова будет высота подъема h в момент t и какова будет скорость v_y в этот момент?

б) Каково будет время подъема t_{max} до наибольшей высоты и полное время полета тела?

в) Какова будет наибольшая высота подъема h_{max}?

§ 45. Движение тела, брошенного под произвольным углом к горизонту

1. Пусть тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту (вверх от горизонта). Как рассчитать координаты тела в произвольный момент t и его скорость в этот момент? Начало координат поместим в точку бросания, одну ось направим горизонтально, а другую — вертикально.

Для решения этой задачи используем принцип независимости движений: а) если бы силы тяжести не было, то тело

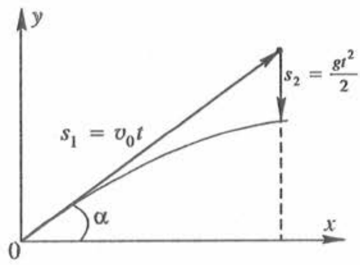


Рис. 61

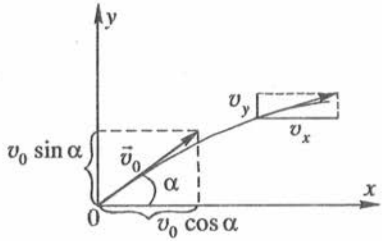


Рис. 62

летело бы по инерции в направлении скорости и за время t переместилось бы на расстояние $s_1 = v_0 t$ (рис. 61); б) если теперь тело остановить и предоставить действию силы тяжести, оно пролетит по вертикали путь $s_2 = \frac{gt^2}{2}$. Если тело одновременно движется по инерции и подвержено силе тяжести, оно попадет в ту же точку, что и при "поочередном" движении. Координаты этой точки, как видно из рисунка, будут такими:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

2. Эти уравнения можно получить иначе. Спроектируем вектор начальной скорости v_0 на ось x и на ось y (рис. 62):

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Тело одновременно перемещается в горизонтальном и в вертикальном направлениях. В горизонтальном направлении на тело никакие силы не действуют, поэтому это движение является равномерным, так что в момент t

$$x = v_{0x} t = (v_0 \cos\alpha)t.$$

В вертикальном направлении на тело действует сила тяжести, так что вертикальное движение является равноускоренным; оно описывается формулой

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Можно показать, что и в этом случае траекторией тела является парабола.

3. Чтобы найти скорость тела в произвольный момент t, найдем сначала проекции скорости на оси координат:

$$v_x = v_{0x},$$

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

Из теоремы Пифагора следует, что $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

§ 46. Примеры решения задач

1. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти: а) время полета тела; б) дальность полета; в) наибольшую высоту подъема.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 62) и находим проекции вектора начальной скорости на оси координат: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.

Далее выписываем уравнения для горизонтальной и вертикальной координат:

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\alpha)t, \qquad (1)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Чтобы найти время полета, надо во второе уравнение подставить $y = 0$:

$$0 = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \;\Rightarrow\; t_1 = 0;\; t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Значение $t_1 = 0$ соответствует началу полета (в этот момент координата y точки равна нулю), а t_2 равно времени полета. Подставив это значение в первое уравнение, найдем дальность полета:

$$l = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

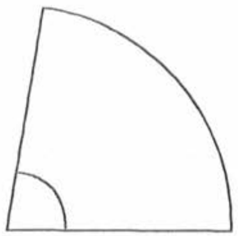


Рис. 63

Наибольшая дальность соответствует углу, при котором $\sin 2\alpha = 1$, т. е. $2\alpha = 90°$ или $\alpha = 45°$.

Чтобы найти наибольшую высоту подъема, можно в уравнение (2) подставить $\frac{t_2}{2}$ (так как уравнение (2) есть уравнение тела, брошенного вертикально вверх со скоростью $v_{0y} \sin\alpha$, а для такого тела время подъема равно времени падения):

$$h_{max} = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

§ 47. Величины, характеризующие равномерное движение точки по окружности

Геометрическое отступление. При движении по окружности часто приходится задавать угол поворота радиуса. В Международной системе единиц (СИ) углы измеряют не в градусах, а в радианах. Радиан — угол, длина дуги которого равна радиусу (рис. 63). Чтобы узнать, сколько радиан содержится в данном угле, надо длину дуги поделить на радиус: $\varphi = \frac{l}{R}$. В частности, для угла 360° получается $\varphi = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радиан (наименование "радиан" часто пропускают, так как при делении длины дуги на радиус получается безразмерная величина, т. е. отвлеченное число).

1. Период и частота вращения. Периодом T называют время, за которое точка совершает один оборот. Частотой ν называют число оборотов за единицу времени (т. е. за секунду). Из определения частоты следует, что

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Например, если за $t = 2$ с точка делает $N = 10$ оборотов, то

$$T = \frac{t}{N} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \text{ с}, \qquad \nu = \frac{N}{t} = \frac{10}{2} = 5 \ \frac{1}{c}.$$

2. Линейная и угловая скорость. Как известно, скоростью точки в данный момент называется отношение перемещения тела ко времени за малый промежуток времени (более строгое определение: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$). При круговом движении эту скорость называют линейной, чтобы отличить ее от угловой. Если точка движется равномерно, то модуль ее линейной скорости постоянен и равен отношению пройденного пути ко времени[1]:

$$v = \frac{l}{t}.$$

Отношение угла поворота радиуса ко времени, за которое этот поворот сделан, называют угловой скоростью:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Можно сказать иначе: линейная скорость численно равна пути, пройденному точкой за одну секунду, а угловая — углу поворота за одну секунду.

Применив обе написанные формулы к частному случаю, когда точка совершила один оборот, получим

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \ \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Сравнивая последние две формулы, видим, что $v = \omega R$.

Упр. 1. Чему равен период вращения и угловая скорость секундной стрелки в часах?

---

[1] Дело в том, что перемещение за малый промежуток времени практически совпадает с пройденным путем, а так как движение равномерное, то для вычисления скорости можно брать путь за любой промежуток времени.

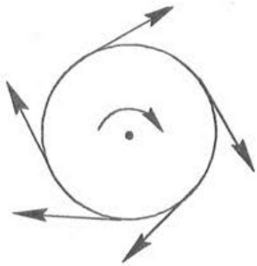


Рис. 64

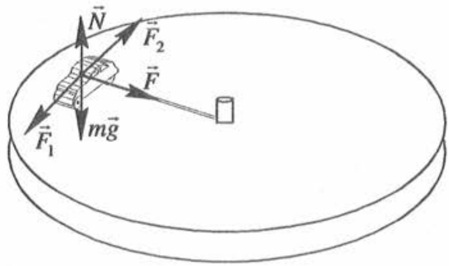


Рис. 65

Упр. 2. Что больше: угловая скорость суточного вращения Земли или угловая скорость часовой стрелки в часах? Во сколько раз?

§ 48. Центростремительное ускорение

1. При движении точки по окружности направление ее скорости непрерывно меняется (рис. 64). А так как два вектора считаются равными лишь в том случае, когда они не только равны по модулю, но и сонаправлены, выходит, что скорость при равномерном движении по окружности меняется, т. е. движение является ускоренным. Вычислим это ускорение, если известна скорость точки v и радиус окружности R.

Рассмотрим тело, движущееся по окружности, например, игрушечный самодвижущийся автомобиль. Предположим, что когда он "предоставлен самому себе", то движется прямолинейно и равномерно (это значит, что сила тяги автомобиля $\vec{F}_1$ уравновешивается силой трения $\vec{F}_2$). Если к нему привязать резиновый канат, другой конец которого привязан к столбику, то автомобиль начнет двигаться по окружности (рис. 65). Это движение можно представить как результат сложения двух движений: а) не будь силы упругости каната $\vec{F}$, он двигался бы прямолинейно и равномерно и за время t прошел бы путь $s_1 = vt$; б) если теперь машину остановить и предоставить ее силе упругости каната, то она пройдет путь $s_2 = \frac{at^2}{2}$ (рис. 66). Несмотря на то, что оба эти движения происходят не одно за другим, а одновременно, машина благодаря независимости этих движений попадает в ту самую точку C, как если бы оба эти движения совершались одно после другого.

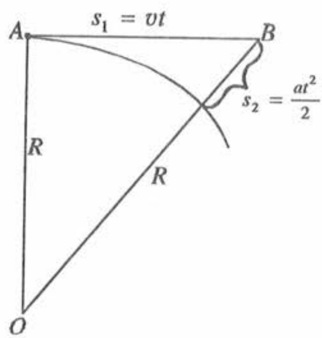


Рис. 66

Однако такая замена одновременного действия сил "поочередным" применима только для малых участков траектории. Если участок большой, то движение вдоль радиуса нельзя будет считать равноускоренным, так как упругая сила в разных точках радиуса будет различной[1]. Чем меньше промежуток времени, который мы рассматриваем, тем меньше движение вдоль радиуса будет отличаться от равноускоренного. Если время t неограниченно уменьшать, то допущенная нами погрешность (при представлении движения по окружности в виде суммы двух последовательных движений) будет неограниченно уменьшаться. Это дает возможность, представляя, что t безгранично уменьшается, получить в пределе точную формулу.

Для вывода искомой формулы применим к треугольнику OAB (рис. 66) теорему Пифагора:

$$R^2 + (vt)^2 = \left(R + \frac{at^2}{2}\right)^2,$$

$$R^2 + v^2t^2 = R^2 + Rat^2 + \frac{a^2t^4}{4},$$

[1] Другая причина, вследствие которой мы должны рассматривать только малые участки, заключается в том, что при одновременном движении по инерции и вдоль радиуса направление ускорения непрерывно меняется; если же сначала машина двигалась по инерции, а потом по радиусу, то направление ускорения оставалось постоянным.

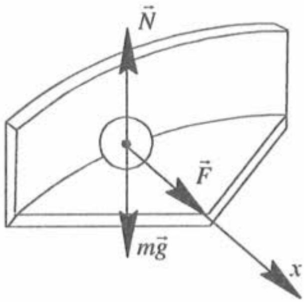


Рис. 67

$$v^2 = aR + \frac{a^2t^2}{4}.$$

Чем меньше промежуток времени t, тем точнее эта формула. Абсолютно точную формулу получим, если t устремим к нулю:

$$v^2 = aR \Rightarrow a = \frac{v^2}{R}.$$

Направление ускорения, как видно из вывода, совпадает с направлением радиуса и направлено к центру. Поэтому его называют центростремительным.

Упр. 1. Тело движется по окружности радиуса R с угловой скоростью ω. Чему равно центростремительное ускорение тела? (О т в е т: $\omega^2 R$).

§ 49. Примеры решения задач

1. На гладком столе лежит стальной шарик массой m = 20 г. Его толкнули, и он стал двигаться со скоростью v = 10 м/с вдоль кривой перегородки, имеющей форму дуги окружности радиуса R = 0,5 м (рис. 67). С какой силой шарик давит на перегородку?

Р е ш е н и е. Показываем все силы, действующие на шарик, и записываем второй закон Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a},$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая на шарик со стороны стенки. Эта сила сообщает шарику центростремительное ускорение, следовательно, направлена туда, куда направлено ускорение, т. е. по радиусу к центру. Туда и направляем координатную ось и проектируем на нее векторное равенство. Получаем

$$F = ma \Rightarrow F = m\frac{v^2}{R}.$$

Отсюда

$$F = 20 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{0,5} = 4\,\text{Н}.$$

Мы нашли силу, с которой перегородка действует на шарик. Согласно третьему закону Ньютона с такой же силой шарик давит на стенку: $|\vec{F}^{(1)}| = 10$ Н.

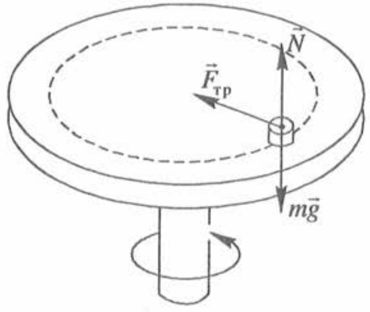


Рис. 68

2. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг своей вертикальной оси. На расстоянии R от оси лежит монета массой m, которая вращается вместе с диском. Линейная скорость диска в точке, где лежит монета, равна v. Какая горизонтальная сила действует на монету и какова природа этой силы?

Р е ш е н и е. Делаем рисунок (рис. 68) и показываем все силы, действующие на монету. Поскольку ускорение монеты направлено по радиусу к центру, должна существовать сила, направленная к центру, которая создает это ускорение. Этой силой является сила трения покоя (на "скользком" диске монета не могла бы вращаться). Записываем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Проектируя на ось, направленную по радиусу к центру, получаем $F_{\text{тр}} = \dfrac{mv^2}{R}$.

3. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг своей вертикальной оси. На расстоянии R от оси лежит монета, которая вращается вместе с диском. Коэффициент трения равен μ. Какова должна быть линейная скорость точки диска, где находится монета, чтобы она начала скользить по диску?

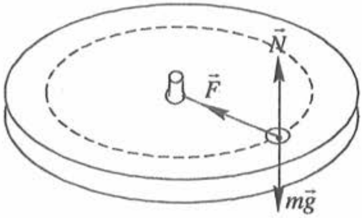


Рис. 69

Р е ш е н и е. Начинаем решать задачу так же, как предыдущую. Считая, что монета не скользит, получаем уравнение $F_{тр} = m\frac{v^2}{R}$.

Проектируя векторное равенство (из предыдущей задачи) на вертикальную ось, получаем: $N - mg = 0$, откуда $N = mg$. Следовательно, $F_{тр} = \mu N = \mu mg$. Таким образом, $\mu mg = m\frac{v^2}{R}$.

Если правая часть уравнения (т. е. сила, необходимая для удержания монеты на данной окружности) станет больше левой (т. е. максимальной величины трения покоя), то сила трения не сможет удержать монету на данной окружности, и она начнет скользить по спирали, удаляясь от центра. Решая последнее уравнение, находим: $v = \sqrt{\mu g R}$.

4. Шарик массой m вращается в горизонтальной плоскости с помощью привязанной к нему горизонтальной нити радиуса R. С какой силой натянута нить, если угловая скорость вращения равна ω. Трение не учитывать.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 69). Проектируем векторное равенство $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$ на ось, направленную по радиусу к центру. Получаем $F = m\frac{v^2}{R}$.

Подставляя $v = \omega R$ (см. § 47), получаем

$$F = m\frac{(\omega R)^2}{R} = m\omega^2 R.$$

5. Автомобиль массой 2 т проходит по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны 40 м, со скоростью 10 м/с. С какой силой автомобиль давит на мост в его середине?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 70) и показываем на нем силы, действующие на автомобиль в вертикальном направлении (горизонтальные силы, если они есть, не вносят

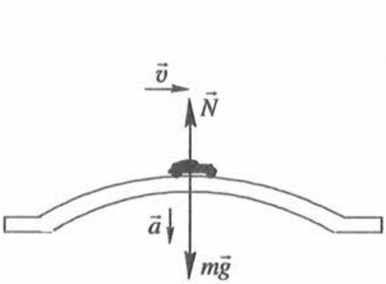


Рис. 70

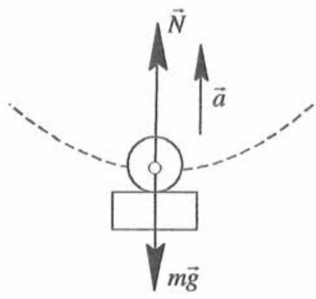


Рис. 71

никакого вклада в вертикальную проекцию векторного равенства, поэтому здесь их можно не учитывать). Центростремительное ускорение направлено по радиусу к центру, значит, в средней точке моста оно направлено вертикально вниз. Следовательно, равнодействующая силы тяжести и силы упругости моста направлена тоже вниз. Выходит, что сила тяжести "пересилила" силу упругости моста, т. е. она больше (по модулю) силы упругости. Записываем второй закон Ньютона: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$.

Координатную ось направляем туда, куда направлено ускорение (т. е. по вертикали вниз). Проектируя на эту ось векторное равенство, получаем

$$mg - N = ma \ \Rightarrow \ mg - N = m\frac{v^2}{R}, \quad \text{откуда} \quad N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right);$$

$$N = 2000 \cdot (10 - \frac{10^2}{40}) = 15\,000 \text{ Н}.$$

Мы нашли силу, с которой мост действует на машину, но с такой же (по модулю) силой машина согласно третьему закону Ньютона действует на мост; $|N^{(1)}| = 15\,000$ Н.

6. Летчик массой m, выводя самолет из пикирования, в нижней части траектории движется по окружности радиуса R со скоростью v. С какой силой летчик давит на сиденье в этой точке?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 71) и показываем вертикальные силы, действующие на летчика: силу тяжести

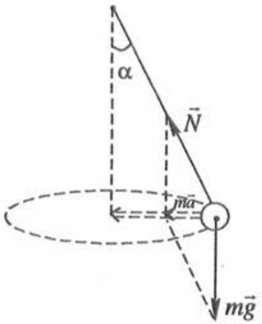


Рис. 72

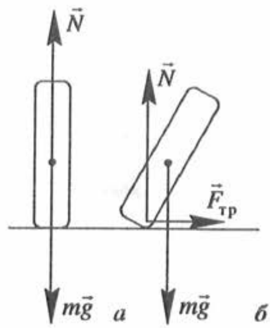


Рис. 73

mg и силу упругости сиденья N. Поскольку центростремительное ускорение направлено вверх, равнодействующая этих двух сил также направлена вверх, т. е. сила упругости "пересилила" силу тяжести, т. е. больше нее. Записываем 2-й закон Ньютона в векторной форме: $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

Ось координат направляем туда, куда направлено ускорение, т. е. вертикально вверх, и проектируем на эту ось полученное уравнение $N - mg = ma \Rightarrow N - mg = m\dfrac{v^2}{R}$.

Отсюда $N = m(g + \dfrac{v^2}{R})$. Мы нашли силу упругости, с которой сиденье действует на летчика, но согласно третьему закону Ньютона с такой же (по модулю) силой летчик давит на сиденье.

7. Шарик подвешен к нити, другой конец которой закреплен на потолке. Шарик отвели в сторону и толкнули так, что он начал описывать в горизонтальной плоскости окружность радиуса R (нить при этом описывает коническую поверхность) (рис. 72). Угол, образуемый нитью с вертикалью, равен α. Какова линейная скорость шарика?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 72) и показываем силы, действующие на шарик: силу тяжести mg и силу упругости нити N. Поскольку ускорение шарика направлено к центру, равнодействующая этих двух сил направлена к центру. Записываем второй закон Ньютона в векторной форме: $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

Одну координатную ось направляем туда, куда направлено ускорение, т. е. по радиусу к центру, другую направляем вертикально. Проектируя векторное уравнение на оси, получаем:

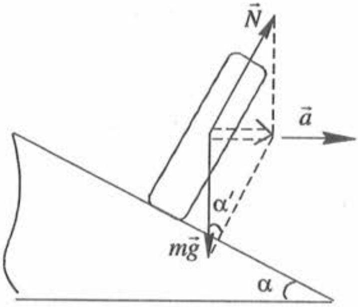


Рис. 74

$$\begin{cases} N\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{R}, \\ N\cos\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений надо исключить N. Для этого находим выражение для N из нижнего уравнения ($N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$) и подставляем его в верхнее уравнение. Получаем:

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

или $g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{v^2}{R}$, откуда $v = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

8. Дорожки (треки) для велосипедных и мотоциклетных гонок на стадионах в местах поворота делают не горизонтальными, а наклонными. Для чего? (О т в е т. Рассмотрим колесо (отдельное колесо или колесо велосипеда или мотоцикла), которое катится прямо (рис. 73а). Для того, чтобы оно сделало поворот, надо, чтобы на колесо стала действовать сила, направленная в сторону поворота. Если колесо стоит прямо, такой силы не возникает, но если колесо наклонить (рис. 73б), возникает сила трения, мешающая проскальзыванию. Эта сила создаст центростремительное ускорение, и колесо начнет поворачиваться. Чтобы совершить поворот на большой скорости, требуется большая сила, и может случиться, что возникшая сила трения будет меньше необходимой силы.)

Можно сделать так, чтобы нужная горизонтальная сила возникала без всякого участия силы трения. Для этого дорожку надо сделать наклонной (рис. 74). Угол наклона можно подобрать так, чтобы равнодействующая силы тяжести mg колеса и силы упругости дорожки была горизонтальной и точно равнялась необходимой силе ($m\frac{v^2}{R}$).

9. Каков должен быть угол наклона дорожки для мотоцикла, чтобы при движении по окружности радиуса R со скоростью v нужная для поворота сила возникала без всякого участия силы трения?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 74) и показываем на нем силы, результирующая которых создает требуемое центростремительное ускорение. Легко видеть, что угол α' равен искомому углу α. Из чертежа видно, что тангенс α' равен отношению силы тяжести к равнодействующей силе:

$$tg\alpha' = \frac{mg}{mv^2 / R} = \frac{gR}{v^2}.$$

§ 50. Задачи

1. Автомашина, масса которой 1000 кг, движется по кольцевой дороге радиусом 100 м с постоянной по модулю скоростью 20 м/с. Куда направлена равнодействующая всех сил, действующих на машину? Чему она равна? (О т в е т: 4 кН).

2. С какой наибольшей скоростью может двигаться автомобиль на повороте с радиусом закругления R = 100 м, чтобы его не "занесло", если коэффициент трения скольжения шин о дорогу μ = 0,4. (О т в е т: 72 км/ч).

3. Человек сидит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом R = 4 м. С какой угловой скоростью должна вращаться платформа вокруг вертикальной оси, чтобы человек не мог удержаться на ней при коэффициенте трения μ = 0,3? (О т в е т: 0,27 $\frac{1}{c}$).

4. Мальчик массой 40 кг качается на качелях с длиной подвеса 2 м. С какой силой он давит на сиденье при прохождении среднего положения со скоростью 6 м/с? (О т в е т: 1120 Н).

5. Автомобиль проходит по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны 60 м. С какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы сила, с которой он давит на мост, в средней точке была втрое меньше силы его тяжести? (О т в е т: 72 км/ч).

6. Автомобиль проходит по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны 40 м. С какой скоростью должен он двигаться, чтобы в средней точке моста он не давил на мост? (О т в е т: 72 км/ч).

7. Летчик, выходя из пикирования, движется по дуге окружности радиуса R (рис. 71) со скоростью v. Во сколько раз сила, с которой он давит в самой нижней точке на сиденье, больше силы тяжести летчика?

(О т в е т: в $\left(1+\dfrac{v^2}{gR}\right)$ раз).

8. Шарик подвешен на нити длиной l, другой конец которой закреплен на потолке. Шарик отвели в сторону и толкнули так, что он начал описывать в горизонтальной плоскости окружность (нить при этом описывает коническую поверхность, поэтому такое устройство называют коническим маятником) (рис. 72). Угол, образованный нитью с вертикалью, равен α. Какова линейная скорость шарика? (О т в е т: $v=\sqrt{gl\sin\alpha\cdot tg\alpha}$).

9. Рассчитайте период вращения конического маятника, длина нити которого равна l, а угол, образованный нитью с вертикалью, равен α.

У к а з а н и е. Сначала решите предыдущую задачу и используйте полученный ответ.

(О т в е т: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}\cos\alpha}$).

ГЛАВА 6

ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

§ 51. Закон всемирного тяготения

1. Чтобы объяснить происхождение силы, заставляющей Луну вращаться вокруг Земли, Ньютон предположил, что Земля притягивает к себе не только те тела, которые находятся на ее поверхности, но что эта сила простирается до Луны и даже дальше, постепенно ослабевая с увеличением расстояния. Поскольку спутники (наподобие Луны) имеются не только у Земли, но и у некоторых других планет, а также у Солнца (спутниками Солнца являются сами планеты), Ньютон решил, что свойством притягиваться друг к другу обладают все без исключения тела. Эти силы называют гравитационными (от латинского *gravitas* — тяжесть).

Чтобы согласовать эту гипотезу с результатами астрономических наблюдений (с закономерностями движения планет, установленных Кеплером), Ньютон предположил, что притяжение точечных тел пропорционально их массам и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}. \qquad (1)$$

Точечными называют тела, размеры которых во много раз меньше расстояния между ними (это другое название материальных точек).

2. Если тела не являются точечными (рис. 75), то для расчета их взаимного притяжения надо каждое тело мысленно разбить на множество мелких частей (настолько мелких, чтобы каждую частицу можно было считать точечным телом). Затем надо рассчитать притяжение каждой частицы данного тела к каждой частице другого тела и результаты просуммировать (не забывая, что силы — это векторы, так что суммирование надо производить по правилу сложения векторов).

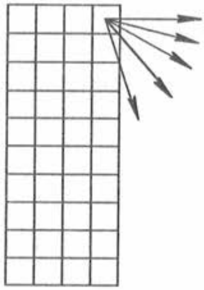


Рис. 75

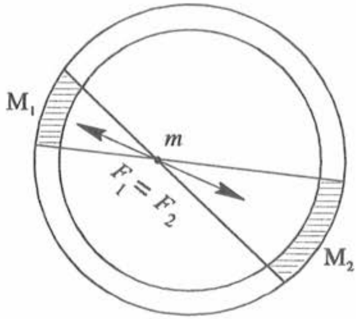


Рис. 76

Когда Ньютон сделал такой расчет для шаров и для сфер (однородных), оказалось, что такие тела (только такие!) притягивают или друг друга, или точечные тела (находящиеся вне шаров или сфер) так, как если бы вся масса шара или сферы находилась в их геометрическом центре. Если же тело находится внутри сферы, то силы притяжения тела к отдельным частям сферы уравновешиваются (рис. 76) так, что результирующая сила равна нулю, в какой бы точке внутри сферы ни находилось тело (это коротко формулируют так: внутри однородной сферы гравитационное поле отсутствует).

3. Коэффициент пропорциональности в формуле (1) называют гравитационной постоянной. Определить эту величину в принципе просто. Надо взять два тела (проще всего в форме шаров), измерить их массы, поместить на определенном расстоянии друг от друга и измерить силу их взаимодействия. Если подставить эти величины в формулу (1), то получим уравнение с одним неизвестным, которое легко решить. Трудность заключается в том, что силы притяжения между окружающими нас телами (например, между двумя гирями) настолько малы, что их трудно даже обнаружить, не то что измерить. Впервые это удалось сделать только в конце XVIII века, когда сумели создать динамометр, способный измерять ничтожные силы (это сделал английский физик Кавендиш в 1798 г.). Основная часть этого прибора (названного крутильными весами) — коромысло,

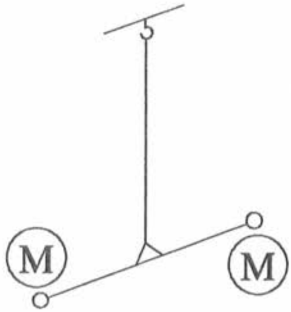


Рис. 77

подвешенное на тончайшей металлической нити, способной закручиваться под действием ничтожных сил. Если на концы коромысла насадить по шарику (рис. 77), а вблизи них поставить массивные неподвижные шары, то коромысло слегка повернется относительно первоначального положения. По углу закручивания нити можно определить величину силы, а затем рассчитать величину гравитационной постоянной. Она оказалась равной $6{,}7\cdot10^{-11}$ ед. СИ.

Чтобы сделать наглядным "физический смысл" этой величины, рассчитаем, с какой силой притягиваются друг к другу две гири по 1 кг с расстояния 1 м. Из формулы видно, что в этом случае сила притяжения численно равна гравитационной постоянной, т. е $6{,}7\cdot10^{-11}$ Н. Эта сила в миллиарды раз меньше силы трения гирь о подставку, поэтому в обычных условиях силы тяготения между гирями или между любыми другими окружающими нас предметами никак не проявляются.

§ 52. Примеры решения задач

1. Зная величину гравитационной постоянной, радиус Земли и ускорение свободного падения, рассчитайте массу Земли.

Р е ш е н и е. Предположим, вблизи земной поверхности расположено небольшое тело (например, кирпич) массой m. Земля притягивает кирпич так, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре. Но тогда кирпич можно считать точечным телом, так как его размеры во много раз меньше радиуса Земли.

Силу притяжения кирпича к Земле можно рассчитать двояко. Согласно закону всемирного притяжения она равна $G\dfrac{Mm}{R^2}$, а согласно второму закону Ньютона она равна про-

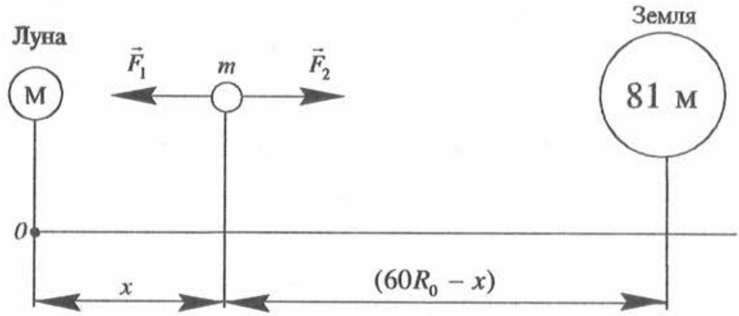


Рис. 78

изведению массы кирпича на то ускорение, которое сообщает ему эта сила $G\dfrac{Mm}{R^2} = mg$.

Отсюда $M = \dfrac{gR^2}{G}$.

2. Определите наименование (размерность) гравитационной постоянной.

Р е ш е н и е. Из формулы $F = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$ следует, что $G = \dfrac{FR^2}{m_1 m_2}$. Подставив сюда наименование силы ($\text{Н} = \text{кг}\cdot\text{м/с}^2$), наименование длины (м) и массы (кг), получаем $[G] = \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$.

3. Расстояние между центрами Земли и Луны равно 60 земным радиусам, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. В какой точке прямой, соединяющей их центры, тело будет притягиваться к Земле и Луне с одинаковыми силами?

Р е ш е н и е. Обозначим массу Луны M, массу Земли 81 M, радиус Земли R_0, расстояние между центрами Луны и Земли — 60 R_0, а массу тела m. Делаем чертеж (рис. 78) и показываем обе силы, действующие на тело. Начало координат помещаем в центре Луны (можно было, разумеется, и в центре Земли) и направляем ось от Луны к Земле. Координату искомой точки обозначим x.

Условие равновесия тела m настолько простое, что можно не записывать второй закон в векторной форме и уравнение проекций, а сразу записать условие равновесия так:

$$F_1 = F_2\,,\ G\frac{Mm}{x^2} = G\frac{81Mm}{(60R_0 - x)^2}\,.$$

После упрощений это уравнение приводится к виду: $81x^2 = (60R_0 - x)^2$. Проще всего решить это квадратное уравнение, извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения: $\pm 9x = 60R_0 - x$; получаем два ответа: $x_1 = 6R_0$; $x_2 = -7{,}5R_0$. Второй ответ не следует отбрасывать. Оказывается, имеется на этой линии еще одна точка, где выполняется условие задачи. Эта точка расположена "за Луной" (на рис. 78 — слева от Луны). Из простых соображений ясно, что такая точка должна существовать. В самом деле, если рассмотреть очень далекую точку (расположенную слева), то для такой точки расстояние до Луны и Земли будет почти одинаковым. Ясно, что притяжение к Земле будет преобладать. Если же рассмотреть точку, очень близкую к Луне, то ясно, что тут будет преобладать притяжение к Луне. Стало быть, будет и такая точка, где эти силы будут одинаковыми.

4. Определите массу M Солнца, зная скорость v движения Земли по орбите, радиус R орбиты и гравитационную постоянную.

Р е ш е н и е. Силу притяжения Земли к Солнцу можно рассчитать двояко: по закону всемирного тяготения и по второму закону Ньютона:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}\,.$$

Отсюда находим $M = \dfrac{Rv^2}{G}$.

§ 53. Задачи

1. Почему тела, находящиеся в комнате, несмотря на взаимное притяжение, не приближаются друг к другу?

2. Две гири массой по 1 кг находятся на расстоянии 1 м друг от друга. а) С какой силой притягиваются они друг к другу? б) С каким ускорением двигались бы друг к другу гири, если бы другие силы (например, силы трения) не мешали этому? в) На сколько они приблизились бы друг к другу за 1000 с (что составляет почти 3 ч), если это ускорение было бы постоянным? г) Фактическое сближение будет больше, чем мы рассчитали, или меньше?

Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ ед. СИ.

(Ответ: а) $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н; б) $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м/с^2; в) 6,7 мм; г) больше).

3. Определите массу M Солнца, зная период T вращения Земли по своей орбите вокруг Солнца, радиус R орбиты и гравитационную постоянную G.

Указание. См. пример 4 из предыдущего параграфа. (Ответ: $M = \dfrac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$).

4. Один спутник находится от центра Земли на расстоянии R, другой — такой же массы — на расстоянии $2R$. Во сколько раз сила притяжения спутника к Земле в первом случае больше, чем во втором?

§ 54. Связь ускорения свободного падения с законом всемирного тяготения

1. Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется силой тяжести этого тела, а ускорение, вызванное этой силой, — ускорением свободного падения. Из закона всемирного тяготения следует, что это ускорение равно:

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{Mm}{R^2 m} = G\frac{M}{R^2}.$$

Отсюда видно, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела, т. е. оно одинаково для всех тел.

Этот факт, как мы уже упоминали, открыт был опытным путем Галилеем.

2. С удалением от центра Земли ускорение свободного падения, как видно из выведенной формулы, уменьшается. Однако, если удалить тело от поверхности Земли на небольшое расстояние (по сравнению с радиусом Земли, равным 6400 км), то этим уменьшением можно пренебречь и считать эту величину постоянной. (Даже при подъеме тела на высоту 100 км его ускорение свободного падения, как показывает расчет, уменьшается только на 0,3 м/с^2). Поэтому свободное падение тел вблизи поверхности Земли практически является равноускоренным.

3. Если бы Земля была неподвижным однородным шаром, то ускорение свободного падения во всех точках земной поверхности было бы одинаковым. На самом же деле это ускорение зависит от широты. Объясняется это двумя причинами. Во-первых, Земля не является идеальным шаром, а несколько сплюснута у полюсов. Выходит, что тело, расположенное на полюсе, ближе к центру Земли, чем тело, расположенное на экваторе. Поэтому ускорение силы тяжести на полюсе больше, чем на экваторе. Вторая причина связана с вращением Земли вокруг своей оси. Мы в данном месте не будем разбирать этот вопрос, только отметим, что это вращение влияет на ускорение свободного падения "в ту же сторону", что и сплюснутость Земли. В результате совместного действия этих двух причин ускорение свободного падения на полюсе больше, чем на экваторе (9,83 м/с^2 на полюсе и 9,78 м/с^2 на экваторе). На остальных широтах оно принимает промежуточные значения.

4. В некоторых пунктах земной поверхности ускорение свободного падения отличается от того значения, которое должно быть на данной широте. Так бывает там, где в недрах Земли залегают породы, плотность которых больше или меньше средней плотности Земли. Это используется в одном из методов разведки полезных ископаемых. Зная точное значение g в данном месте, можно делать обоснованные предположения о наличии в этом месте тех или иных полезных ископаемых. Точные измерения g делаются в настоящее время приборами, напоминающими пружинный динамометр (в них измеряется сила тяжести гирьки известной массы).

§ 55. Примеры решения задач

1. Чему равно ускорение g свободного падения на расстоянии R от центра Земли (R больше радиуса Земли)? Считать известными радиус Земли R_0 и ускорение свободного падения у поверхности Земли g_0.

Решение. Напишем выражения для ускорения свободного падения у поверхности Земли и на расстоянии R от центра:

$$g_0 = G\frac{M}{R_0^2},$$

$$g = G\frac{M}{R^2}.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_0^2}{R^2} \Rightarrow g = \frac{g_0 R_0^2}{R^2} = g_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

2. На какой высоте h от поверхности Земли ускорение свободного падения в 2 раза меньше, чем у поверхности Земли? Считать известным радиус Земли R_0.

Решение. Напишем выражение для ускорения свободного падения у поверхности Земли и на высоте h:

$$g_0 = G\frac{M}{R_0^2},\ \frac{g_0}{2} = G\frac{M}{(R_0 + h)^2}.$$

Поделив одно выражение на другое, получаем

$$2 = \left(\frac{R_0 + h}{R_0}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_0 + h}{R_0} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow h = (\sqrt{2} - 1)R_0 = 0{,}4R_0.$$

Отрицательный корень отбрасываем, здесь он не имеет смысла.

3. Две планеты состоят из одного и того же вещества, но радиус второй планеты втрое больше, чем первой. Во сколько раз ускорение свободного падения на поверхности второй планеты больше, чем на поверхности первой? Известно, что объем шара пропорционален кубу его радиуса.

Р е ш е н и е. Объем второй планеты в 3^3, т. е. в 27 раз больше объема первой, значит, и масса ее в 27 раз больше. Напишем выражение для ускорения свободного падения на поверхностях первой и второй планет:

$$g_1 = G\frac{M}{R^2},$$

$$g_2 = G\frac{27M}{(3R)^2}.$$

Поделив одно выражение на другое, получаем: $\dfrac{g_2}{g_1} = \dfrac{27}{9} = 3$.

§ 56. Гора Ньютона. Искусственные спутники Земли

1. Под действием силы тяжести брошенные тела, как установил еще Галилей, движутся по параболе. Но это верно лишь в том случае, если сила тяжести тела одинакова во всех точках (по модулю и направлению). Это условие выполняется, если дальность полета и высота полета не очень велики (по сравнению с радиусом Земли). Как будет двигаться брошенное тело в общем случае, когда приходится учитывать, что сила тяжести различна на разных высотах и всегда направлена к центру Земли? Эту задачу впервые решил Ньютон. Для наглядности он представил, что существует гора настолько высокая (например, высотой 100 км), что сопротивление воздуха там практически отсутствует, и на этой горе находится пушка, способная выпускать горизонтально снаряды с любой скоростью. Какова будет траектория выпущенных снарядов при отсутствии сопротивления воздуха? Ясно, что чем больше начальная скорость снаряда, тем большей будет дальность его полета (рис. 79). Но в общем случае траекторией полета будет не парабола, а часть другой кривой — эллипса ("дальний" фокус которого

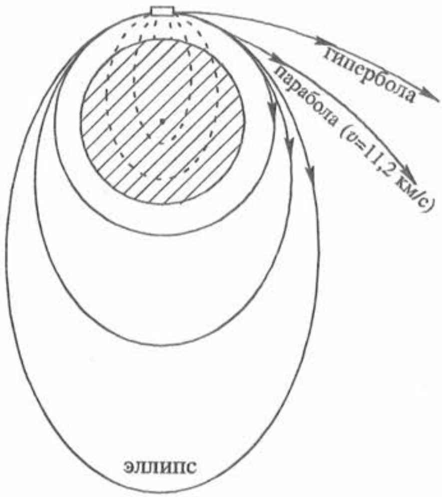


Рис. 79

находится в центре Земли). С увеличением скорости снаряда дальность непрерывно растет, и при некоторой скорости снаряд вообще не упадет на Землю, а станет двигаться по окружности.

Скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно не упало, а стало спутником, движущимся по круговой орбите вблизи поверхности Земли, называется первой космической скоростью. Рассчитаем эту скорость. На спутник действует одна-единственная сила — сила тяжести. Она сообщает спутнику ускорение g, т. е. ускорение свободного падения, соответствующее данной высоте. С другой стороны, чтобы спутник двигался по орбите радиуса R со скоростью v, надо, чтобы ему сообщали ускорение $\frac{v^2}{R}$. Таким образом, $\frac{v^2}{R} = g$, откуда $v = \sqrt{gR}$. В частном случае, если полет происходит настолько близко к поверхности Земли, что ускорение свободного падения можно считать равным $g_0 = 9{,}8$ м/с^2, а радиус орбиты практически совпадает с радиусом Земли $R_0 = 6400$ км $= 6{,}4 \cdot 10^6$ м, получаем

$$v_0 = \sqrt{g_0 R_0} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = 8 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 8 \text{ км/с}.$$

Такова величина первой космической скорости.

Первый в истории человечества спутник был запущен в Советском Союзе (в 1957 г.). Разумеется, горы, которую придумал Ньютон, не существует, и к тому же никакая пушка не могла бы сообщить снаряду нужную скорость. Запуск спутников производится с помощью ракет.

2. Иногда спрашивают, как объяснить, что спутник не падает на Землю, хотя Земля тянет его к себе. Прежде чем ответить на этот вопрос, надо уточнить, какой смысл вкладывается в утверждение: "тело падает". Первое определение: "падать — значит отклоняться в сторону Земли от того направления, куда летело бы тело по инерции". При таком понимании надо считать, что спутник непрерывно падает, так как он непрерывно отклоняется от касательного направления. Будь Земля плоской, спутник в результате такого непрерывного падения обязательно упал бы на Землю, но так как Земля круглая, то он может падать, не приближаясь к ее поверхности.

Можно дать такое определение: "падать — значит лететь по вертикали к поверхности Земли". Тогда на поставленный вопрос надо отвечать так. Автор вопроса считает, что тело всегда летит туда, куда тянет его сила. Но это утверждение является грубой ошибкой. Так было бы в том случае, если тело не обладало бы инерцией. Но так как всякое тело инертно, то оно всегда "стремится" лететь туда, куда была направлена его скорость (а вовсе не туда, куда направлена сила). Например, брошенное вверх тело летит после броска вверх, а не вниз! Брошенное под углом тело летит по параболе (а не вертикально вниз). Спутник не приближается к Земле потому, что его движение есть совокупность двух движений: движения по инерции и свободного падения. Совокупность этих двух движений в зависимости от "начальных условий" может образовывать траектории разного вида (рис. 79), в том числе даже такие, при которых тело безвозвратно удаляется от Земли.

3. Если сообщить телу скорость несколько больше первой космической, то тело будет двигаться по эллипсу ("ближний" фокус которого находится в центре Земли). Чем больше скорость, тем более вытянутым получается эллипс (рис. 79). Наконец, при некоторой скорости (11,2 км/с) траектория станет незамкнутой — тело не станет спутником Земли, а уйдет в межпланетное пространство (станет спутником Солнца). Эту скорость называют второй космической скоростью.

§ 57. Примеры решения задач

1. Рассчитайте скорость спутника, который движется по круговой орбите радиуса R. Считать известным радиус Земли R_0 и ускорение силы тяжести у поверхности Земли g_0.

Р е ш е н и е. На спутник действует одна-единственная сила — сила тяжести. Она сообщает спутнику ускорение g. С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности, его ускорение равно $\frac{v^2}{R}$. Итак, $g = \frac{v^2}{R}$.

Чтобы найти ускорение g свободного падения на данном расстоянии от центра Земли, используем формулы, которые следуют из закона всемирного тяготения: у поверхности Земли $g_0 = G\frac{M}{R_0^2}$, на расстоянии R от центра Земли $g = G\frac{M}{R^2}$. Поделив одно выражение на другое, получаем $\frac{g}{g_0} = \frac{R_0^2}{R^2} \Rightarrow g = \frac{g_0 R_0^2}{R^2}$. Подставив это в первое уравнение, получаем уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{g_0 R_0^2}{R^2} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = R_0\sqrt{\frac{g_0}{R}}.$$

2. Используя ответ к предыдущей задаче, рассчитайте период вращения спутника, радиус орбиты которого равен R.

Р е ш е н и е. Линейную скорость можно рассчитать, поделив путь на то время, за которое этот путь пройден. Применив это к одному обороту, получаем: $v = \frac{2\pi R}{T}$. Отсюда $T = \frac{2\pi R}{v}$. Подставляя вместо v выражение, найденное в предыдущей задаче, получаем $T = 2\pi\frac{R}{R_0}\sqrt{\frac{R}{g_0}}$.

3. Спутник двигался по круговой орбите с некоторой скоростью v. Как изменится в первый момент вид его

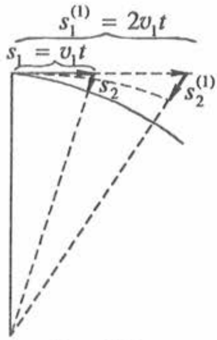


Рис. 80

траектории, если с помощью корректировочного двигателя: а) увеличить его скорость; б) уменьшить его скорость?

Р е ш е н и е. Движение по окружности можно рассматривать как сочетание двух одновременных движений. За малое время t тело одновременно должно переместиться по касательной на расстояние $s_1 = vt$ и вдоль радиуса к центру на расстояние $s_2 = \frac{at^2}{2}$ (рис. 80). При этом оно попадет в точку, лежащую на той же окружности. Если скорость увеличится, например, удвоится, то тело за время t пройдет по касательной вдвое больший путь (показано пунктиром) и, когда под действием радиальной силы пройдет путь $s_2^{(1)} = \frac{at^2}{2}$, то очутится в точке, лежащей вне окружности. Таким образом, при увеличении скорости тело начнет в первый момент отдаляться от центра. Рассуждая так же, легко увидеть, что при уменьшении скорости тело будет приближаться к центру окружности. Если в результате торможения спутника из-за сопротивления воздуха его скорость будет снова и снова уменьшаться, то он будет непрерывно двигаться по спирали, пока не упадет на Землю.

4. Почему спутники и космические корабли, как правило, запускают с запада на восток? (О т в е т. Решая задачи о движении спутников, мы, как и всегда, когда применяем законы Ньютона, пользуемся инерциальной системой отсчета. При расчете движения спутников и космических кораблей Землю нельзя считать инерциальной системой. В инерциальной системе отсчета Земля в своем суточном движении вращается с запада на восток (поскольку Солнце всходит на востоке и заходит на западе). На экваторе эта скорость составляет 0,5 км/с. Таким образом, из 8 км/с, которые надо сообщить спутнику в инерциальной системе, 0,5 км/с создаются “бесплатно”, если запускать ракету с запада на восток (на экваторе). К этому надо добавить только 7,5 км/с).

§ 58. Задачи

1. Рассчитайте, с какой скоростью движется спутник, летящий на высоте, равной радиусу Земли. Считать известным радиус Земли R_0 и ускорение свободного падения у поверхности Земли g_0. (О т в е т: $v = \sqrt{\frac{g_0 R_0}{2}}$).

2. Чему равен период вращения спутника, движущегося с первой космической скоростью? Считать известным радиус Земли R_0 и ускорение свободного падения у ее поверхности g_0. (О т в е т: $2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}$).

3. Чему равна первая космическая скорость у планеты, радиус которой вдвое больше, чем у Земли, а масса в 8 раз больше? Считать известными радиус Земли R_0 и ускорение свободного падения у ее поверхности g_0.

У к а з а н и е. Сначала найдите ускорение свободного падения на поверхности этой планеты.

(О т в е т: $2\sqrt{g_0 R_0}$).

4. Можно ли запустить спутник так, чтобы он все время висел над определенной точкой экватора? (О т в е т: можно, для этого надо его период вращения сделать равным 24 ч).

5. Можно ли запустить спутник так, чтобы он все время висел над Санкт-Петербургом? (О т в е т: нельзя).

§ 59. Вес тела

1. Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется, как мы знаем, силой тяжести. Упругую силу, с которой тело действует на опору (или на подвес), называют весом тела. Если тело неподвижно относительно Земли, то

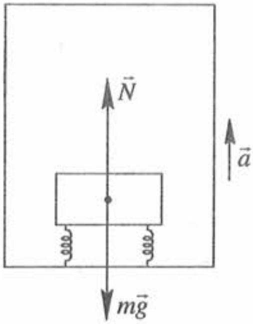


Рис. 81

эти две силы равны по модулю[1]. Но если подставка или подвес заставляют тело ускоренно двигаться вверх, то вес становится больше силы тяжести, если же ускорение направлено вниз, то вес становится меньше силы тяжести.

Почему при ускоренном движении вверх вес становится больше силы тяжести? Разберем это на примере ящика, который лежит на дне лифта, ускоренно движущегося вверх. На ящик действует сила тяжести и упругая сила со стороны дна лифта. Для наглядности можно представить, что между ними имеются пружины (рис. 81). Когда лифт покоился, пружины были сжаты так, что их сила упругости уравновешивала силу тяжести ящика. Пусть теперь пол лифта начал ускоренно двигаться вверх. В первый момент ящик останется на месте, следовательно, пружины несколько сожмутся. Их упругая сила несколько увеличится и "пересилит" силу тяжести. Ящик начнет двигаться ускоренно вверх, но сначала это ускорение будет меньше, чем ускорение дна лифта, поэтому дно лифта по-прежнему будет догонять ящик, и пружины сожмутся еще больше. При этом упругая сила снова возрастет, следовательно, возрастет и ускорение ящика. В конце концов ускорение ящика сравняется с ускорением дна лифта. С этого момента упругая сила пружин перестанет возрастать, но к этому моменту она станет заметно больше силы тяжести ящика. Согласно третьему закону Ньютона, с какой силой пружины действуют на ящик, с такой же силой ящик давит на пружины. Эта сила и будет называться весом ящика. Увеличение веса, вызванное ускоренным движением, называют перегрузкой.

В нашем описании мы не учли, что уже после первого толчка возникнут колебания ящика. Можно поэтому пред-

[1] Строго говоря, вес тела на всех широтах, кроме полюсов, из-за вращения Земли меньше силы тяжести, но даже на экваторе, где эта разница наибольшая, разница составляет десятые доли процента.

ставить, что рост ускорения лифта происходит "ступеньками" и после каждой ступеньки мы выжидали, пока колебания успокоятся.

2. Хотя весом мы называем силу, действующую на опору, это вовсе не значит, что человек, вес которого увеличился, например, в 3 раза (по сравнению с нормальным), не ощущает этого увеличения. Голова человека стала давить на свою "подставку", т. е. на шею, с трехкратной силой, туловище с головой стало давить на ноги с трехкратной силой, наконец, на ступни действует практически вес всего тела.

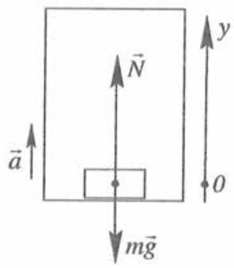


Рис. 82

Упр. 1. Докажите, что если тело неподвижно, то его вес равен силе тяжести.

§ 60. Примеры решения задач

1. Ракета начала подниматься с ускорением $a = 90$ м/с^2. Во сколько раз по сравнению с "нормальным" увеличился вес груза, лежащего на дне ракеты?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 82) и показываем на нем силы, действующие на груз: силу тяжести $m\vec{g}$ и силу упругости $\vec{N}$, действующую на груз со стороны ракеты. Поскольку ускорение направлено вверх, то эта сила больше силы тяжести. Проекция векторного уравнения, выражающего второй закон Ньютона, на ось, направленную вертикально вверх, дает уравнение

$$N - mg = ma,$$

откуда $N = m\,(g + a)$. Согласно третьему закону Ньютона сила, с которой дно ракеты действует на груз, равна по модулю силе, с которой груз действует на ракету. Эта последняя сила и есть вес груза. Поделив ее на силу тяжести, находим то, что ищем:

$$\frac{N^{(1)}}{mg} = \frac{m(g+a)}{mg} = \frac{g+a}{g}; \ \frac{N^{(1)}}{mg} = \frac{10+90}{10} = 10.$$

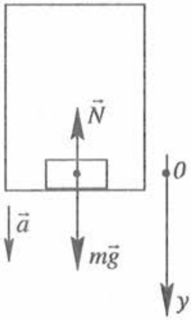


Рис. 83

2. Лифт спускается с ускорением a ($a < g$). Чему равен вес ящика, лежащего в лифте?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 83). Уравнение движения (в проекциях) получится таким: $mg - N = ma$, откуда $N = m(g - a)$. Вес ящика согласно третьему закону Ньютона равен этой силе: $|N^{(1)}| = m(g - a)$.

3. Чему равен вес тела в лифте, который свободно падает?

Р е ш е н и е. Из ответа к предыдущей задаче следует $|N^{(1)}| = m(g - a) = m(g - g) = 0$.

§ 61. Невесомость

1. При некоторых условиях вес тела может полностью исчезнуть — наступит невесомость. Чтобы выяснить условия, при которых возникает невесомость, представим кабину, в которой находится робот (будем его условно называть пассажиром) и несколько предметов. Сопротивление воздуха пусть отсутствует.

а) Пусть кабина начала свободно падать. Еще Галилей установил, что сила тяжести сообщает всем телам независимо от их массы одинаковые ускорения. Поэтому, если тела даже не действовали друг на друга посредством упругих сил (например, если в начальный момент их кто-то поднял и потом отпустил), то они, хотя и не касаются своих подставок, будут падать с таким же ускорением, как кабина, не обгоняя и не отставая от нее (рис. 84). Точно так же они летели бы, если бы находились не внутри кабины, а вне ее. С точки зрения пассажира, все предметы (да и он сам) будут неподвижно висеть в воздухе. Если на голове пассажира был тяжелый ящик, то после того, как началось падение, ящик перестанет давить на него: оба

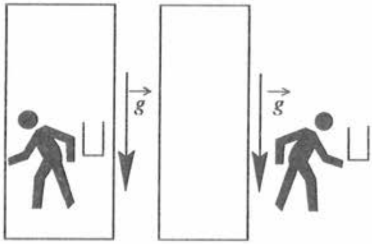


Рис. 84

будут падать с одинаковыми ускорениями независимо друг от друга. Никакое другое тело (или часть тела) не будет давить на свою подставку. В кабине наступит невесомость.

б) Пусть теперь кабина и все, что в ней содержится, брошены вертикально вверх. Опять-таки, если в начальный момент пассажир и предметы не касались пола (но их бросили вверх с такой же скоростью, как кабину), то все равно они будут лететь вверх независимо от кабины, не опережая и не отставая от нее и друг от друга (скорость любого тела, в том числе и кабины, будет выражаться формулой $v = v_0 - gt$, а координата $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$). Стало быть, и в этом случае в кабине будет невесомость.

в) Пусть кабина сброшена с горизонтально летящего вертолета. Опять-таки, все предметы, обладая в начальный момент одинаковыми горизонтально направленными скоростями, будут независимо друг от друга лететь по одинаковым траекториям, не опережая и не отставая друг от друга, независимо от того, находятся они внутри кабины или вне ее. То же будет, если кабину вывести на орбиту и сделать спутником (в обоих случаях мы предполагали, что сопротивление воздуха отсутствует).

2. Из этих примеров ясно, что невесомость наступает тогда, когда на тело действуют только гравитационные силы. Это связано с их особыми свойствами. Гравитационные силы — единственные, которые всем телам, находящимся в данном месте, сообщают одинаковые ускорения независимо от размеров тел, их массы, формы, химического состава и т. п. Поэтому, если группе тел, находящихся в данном месте, сообщить одинаковые начальные скорости, то они (если других сил, кроме гравитационных, нет) будут лететь по одинаковым траекториям независимо друг от друга, не деформируя друг друга.

Упр. 1. Кабину с грузом уронили с неподвижного вертолета, находившегося на большой высоте. Учитывая сопротивление воздуха и считая ускорение силы тяжести одинаковым на всех высотах, ответьте на следующие вопросы: а) как будет меняться при падении ускорение кабины (увеличиваться, уменьшаться или оставаться неизменным); б) как будет меняться вес груза, лежащего на полу кабины; в) как приблизительно выглядит график зависимости веса груза от времени?

Упр. 2. На каких этапах полета космического корабля с Земли на Венеру существовала невесомость?

ГЛАВА 7

ЕЩЕ О ЗАКОНАХ МЕХАНИКИ

(О принципе относительности и о центре масс)

§ 62. Принцип относительности Галилея

1. Законы Ньютона выполняются, как известно, во всех инерциальных системах отсчета. Поскольку эти законы лежат в основе всей механики (к ним добавляются только определения и теоремы, опирающиеся в конечном счете на законы Ньютона), следовательно, законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах. Это значит, что во всех инерциальных системах отсчета все механические процессы протекают одинаково (при одинаковых условиях). Это утверждение называют принципом относительности Галилея (так как им этот принцип был установлен). Галилей обратил внимание на механические процессы, совершающиеся в каюте корабля, плывущего прямолинейно и равномерно по спокойному морю. Для наблюдателя, находящегося в каюте, падение брошенных тел, вытекание воды из сосудов, полет мух в воздухе и плавание рыб в аквариуме происходит точно так же, как на неподвижном корабле (сюда можно добавить бесчисленное количество других примеров: качание маятника, вращение волчка, ход механических часов и т. д.). Наблюдая механические процессы, невозможно поэтому установить ни величину скорости корабля, ни даже сам факт его движения. Чтобы установить, движется корабль или нет, надо наблюдать за землей или за предметами, лежащими на воде: удаляется от них корабль или нет.

2. Равноправие всех инерциальных систем отсчета при описании механических явлений вовсе не означает, что одно и то же движение выглядит одинаково во всех инерциальных системах. Если уронить с полки движущегося равномерно вагона яблоко, то относительно вагона оно будет двигаться прямолинейно (по вертикали). Относительно Земли оно будет двигаться по параболе. Разница получилась потому, что "начальные условия" были тут разными. Относительно вагона яблоко в начальный момент покоилось, а относительно Земли — двигалось горизонтально. Принцип относительности утверждает, что при одинаковых начальных условиях все механические явления происходят одинаково, из какой бы инерциальной системы их ни наблюдали.

§ 63. О центре масс тела

1. При формулировке законов Ньютона предполагалось, что речь идет о точечных телах. Если тело не является точечным, то дело обстоит несколько сложнее. Например, можно ударить сбоку мяч, лежащий на Земле так, что он покатится, одновременно вращаясь вокруг вертикальной оси. Согласно первому закону Ньютона, если на тело не действуют другие тела, оно должно двигаться прямолинейно и равномерно. На мяч никакие горизонтальные силы не действуют, тем не менее все его точки, кроме центра, будут двигаться по "петлеобразным" траекториям. Другой пример: если диск, раскрутив, бросить вертикально вверх, то только его центр будет двигаться с ускорением, равным $\frac{F_т}{m} = g$ (где $F_т$ — сила тяжести диска). Все остальные точки будут двигаться с различными ускорениями и по различным траекториям[1].

2. Теория и наблюдения показывают, что под действием внешних сил только центр тяжести тела будет двигаться так, как если бы именно к нему была приложена равнодействующая всех внешних сил и если бы в этой точке была сосредоточена вся масса тела. Поэтому эту точку называют также центром масс тела. Точки, лежащие вне центра масс, в общем случае совершают более сложное движение. Например, если бросить диск под углом к горизонту, то только центр его масс будет двигаться точно по параболе, остальные точки могут двигаться по более замысловатым траекториям. Если диск в полете разломается на несколько частей, то центр масс диска по-прежнему будет двигаться по параболе, хотя отдельные осколки могут разлететься в разные стороны.

Итак, при строгой формулировке первого и второго законов Ньютона надо оговаривать, что все утверждения этих законов относятся либо к точечным телам, либо к центрам масс неточечных тел (если под силами подразумевать только внешние силы). Что касается третьего закона, то равнодействующая всех сил, с которой одно тело действует на другое, может быть приложена не только в центре масс, но и в другой точке тела.

---

[1] Это вовсе не значит, что второй закон Ньютона неприменим к отдельным частицам диска. Дело в том, что при "закручивании" диск деформируется, и отдельные его части действуют друг на друга с определенными силами. Эти силы называют внутренними. Если учесть и эти силы, то ускорение любой частицы будет определяться формулой $a = F/m$, где F — равнодействующая всех сил (внутренних и внешних), действующих на данную частицу. Но если учитывать только внешние силы, то формула $a = F/m$ описывает движение только центра диска.

ГЛАВА 8

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

§ 64. Роль законов сохранения

1. Мощным методом решения физических проблем является использование законов сохранения. Этот метод не требует знания промежуточных стадий процесса — надо знать только некоторые начальные и некоторые конечные данные. Это можно пояснить таким примером. Пусть у меня в двух карманах было 20 000 рублей, и фокусник начал быстро перекладывать деньги из одного кармана в другой и обратно. Я могу не знать всех его манипуляций, но это и не требуется для решения некоторых задач. Если спустя некоторое время в одном кармане осталось 1000 рублей, я уверенно могу утверждать, что в другом кармане 19 000 рублей. Разумеется, это верно, если фокусник не добавлял своих денег и не брал моих, т. е. если система была "замкнутой".

В химии и физике широко используется закон сохранения массы. Другими важными законами являются закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. Если одновременно можно применять несколько законов сохранения, то по немногим начальным данным можно получать важные сведения о конечном результате, не зная никаких подробностей о промежуточных процессах.

§ 65. Закон сохранения импульса

1. Импульсом (или количеством движения) тела называют произведение массы тела на его скорость: $m\vec{v}$ — импульс тела.

Если речь идет об одном теле, не взаимодействующем с другими телами, то ясно, что его импульс сохраняется неизменным — это следствие закона инерции. Пусть теперь имеются два тела, например, два шара, которые катятся в одном направлении. Если один шар догнал другой и уда-

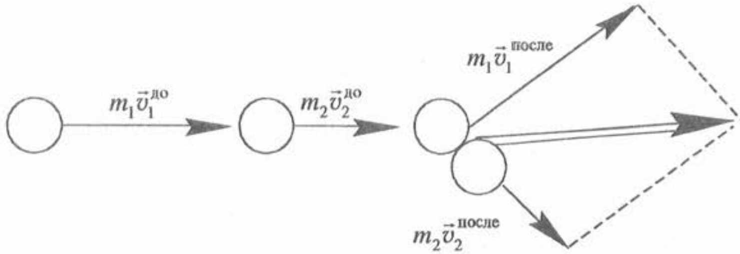


Рис. 85

рил его "в лоб", то импульс этого второго шара увеличится, а первого уменьшится. Сумма же их, как мы покажем, останется такой же, какой была до столкновения. Это верно и в том случае, если сталкивающиеся и разлетающиеся тела движутся не вдоль одной линии, а произвольным образом; только в этом случае сохраняется не алгебраическая, а векторная сумма импульсов.

Доказательство проведем для частного случая, когда система состоит из двух тел (рис. 85). Как бы ни взаимодействовали эти тела (сталкивались или же действовали друг на друга издали), в любой момент силы, с которыми они действуют друг на друга, равны и противоположны:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Подставляя сюда выражение силы из второго закона Ньютона, получим:

$$m_1 \frac{\vec{v}_1^{\text{после}} - \vec{v}_1^{\text{до}}}{t} = -m_2 \frac{\vec{v}_2^{\text{после}} - \vec{v}_2^{\text{до}}}{t},$$

откуда

$$m_1\vec{v}_1^{\text{до}} + m_2\vec{v}_2^{\text{до}} = m_1\vec{v}_1^{\text{после}} + m_2\vec{v}_2^{\text{после}}.$$

2. Мы вывели эту формулу для частного случая, когда система состоит из двух тел, но этот закон верен и в более общем случае, когда система состоит из любого числа тел, не взаимодействующих с посторонними телами. Таким образом, векторная сумма замкнутой системы сохраняется неизменной при любых взаимодействиях между этими телами. Замкнутой системой называют группу тел, которые не взаимодействуют ни с какими другими телами, не входящими в эту группу.

§ 66. Задачи

1. Тележка массой 100 кг, двигавшаяся со скоростью 6 м/с, налетела на неподвижную тележку массой 300 кг. Удар абсолютно неупругий (это значит, что тележки после удара сцепились). С какой скоростью они покатятся?

Указание. Запишите векторное уравнение, выведенное в предыдущем параграфе, и спроектируйте его на координатную ось, направленную туда, куда направлена скорость тележки. Получится уравнение с одним неизвестным. (Ответ: 1,5 м/с).

2. Два тела, массы которых равны 6 кг и 2 кг, движутся навстречу друг другу со скоростями 4 м/с каждое. С какой скоростью и в каком направлении будут двигаться эти тела после абсолютно неупругого удара (т. е. если после удара тела "склеятся")? (Ответ: 2 м/с; туда, куда двигалось тело массой 6 кг).

3. В лодке массой 200 кг (указана масса пустой лодки) находится мальчик массой 50 кг. Лодка с мальчиком движется со скоростью 1 м/с. Мальчик прыгает с лодки со скоростью 7 м/с относительно Земли. С какой скоростью будет двигаться лодка после этого, если мальчик прыгает: а) по направлению движения лодки; б) в противоположную сторону? (Ответ: 0,5 м/с в сторону, обратную первоначальному движению лодки; 2,75 м/с).

4. Пуля массой 8 г вылетела из винтовки массой 4 кг со скоростью 750 м/с. С какой скоростью отлетела бы винтовка, если бы ее никто не удерживал? (Ответ: 1,5 м/с).

5. Зенитный снаряд, выпущенный вертикально вверх, разорвался в самой верхней точке траектории (т. е. в точке, где он был неподвижен) на три осколка. Докажите, что скорости всех трех осколков (в начальный момент) лежат в одной плоскости.

Указание. До взрыва импульс снаряда равнялся нулю. Значит, и после взрыва векторная сумма импульсов всех осколков должна равняться нулю. На рис. 86 показана

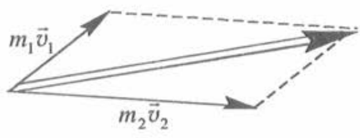


Рис. 86

(двойной линией) векторная сумма импульсов двух осколков. Подумайте, как должен быть направлен импульс третьего осколка, чтобы векторная сумма всех трех импульсов равнялась нулю.

6. Неподвижный снаряд разорвался на три осколка. Два осколка разлетелись перпендикулярно друг другу, причем скорость первого осколка массой 10 кг равна 30 м/с, а второго массой 20 кг равна 20 м/с. Третий осколок отлетел со скоростью 100 м/с. Какова его масса? (О т в е т: 5 кг).

§ 67. Реактивное движение

1. Закон сохранения импульса позволяет (в числе многих других задач) объяснить и исследовать реактивное движение. При “обычном”, нереактивном движении (например, при движении автомашины, лодки, птицы) изменение скорости тела происходит в результате взаимодействия с окружающими телами: с Землей, водой, воздухом. При реактивном движении тела, например, ракеты изменение скорости происходит в результате взаимодействия ракеты с выброшенными из нее продуктами сгорания. Эти продукты получают относительно ракеты определенную скорость, стало быть, их импульс становится иным, чем до выброса. Ясно, что импульс оставшейся части ракеты также должен измениться, иначе суммарный импульс не остался бы неизменным.

2. Рассчитаем, какую скорость получит ракета, которая вначале покоилась, после того, как она выбросит небольшую порцию продуктов сгорания массой ΔM со скоростью u (рис. 87). Первоначальную массу ракеты обозначим M. При расчете будем считать, что силой тяжести ракеты можно пренебречь по сравнению с реактивной силой, т. е. что ракету с продуктами сгорания можно считать замкнутой системой.

Вначале ракета вместе с находящимися в ней топливом и окислителем покоилась, так что первоначальный импульс

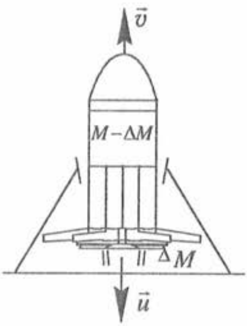


Рис. 87

Рис. 88

ракеты равнялся нулю. Направив координатную ось вертикально вверх, из закона сохранения импульса получаем:

$$0 = (M - \Delta M)v - \Delta M u \Rightarrow v = \frac{\Delta M u}{M - \Delta M} \approx \frac{\Delta M}{M} u .$$

Отсюда видно, что чем больше скорость выбрасываемого газа, тем большей скорости может достигнуть ракета.

3. Двигатели, использующие реактивное движение, делят на ракетные и воздушно-реактивные. Ракетные несут с собой не только топливо (керосин, жидкий водород или другие виды топлива), но и окислитель (например, жидкий кислород). Воздушно-реактивные используют при сжигании топлива кислород, имеющийся в атмосфере. На рис. 88 показана схема устройства ракетного двигателя (жидкостного). Топливо и окислитель с помощью насосов подаются в камеру сгорания. Здесь топливо разбрызгивается, смешивается с окислителем и сгорает. При этом образуются газы с высокой температурой (более 3000 °C) и большим давлением. Газы с большой скоростью вытекают из ракеты через канал особой формы — сопло, создавая реактивную тягу. Соплу придают такую форму, чтобы скорость вытекающих газов была наибольшей.

На рис. 89 показана схема устройства воздушно-реактивного двигателя (турбокомпрессорного). Запускается он от стартера, который заставляет вращаться вал, на ко-

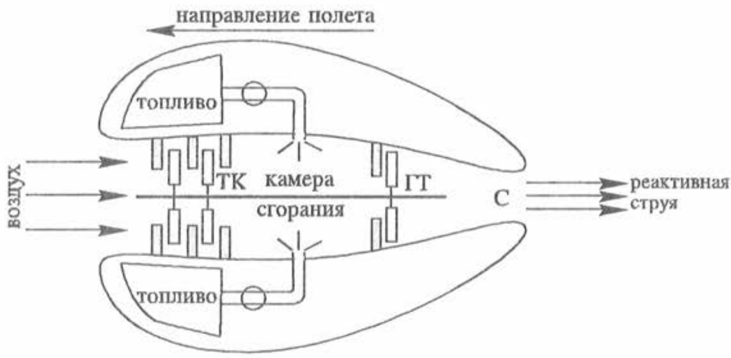


Рис. 89

тором расположен турбокомпрессор (ТК) и газовая турбина (ГТ). Турбокомпрессор всасывает и сжимает воздух, который подается в камеру сгорания. В эту же камеру вбрызгивается топливо. Оно сгорает, и возникшие горячие газы вырываются через сопло (С), создавая реактивную тягу. Попутно газы заставляют вращаться лопасти газовой турбины. После того, как ротор[1] турбины начнет вращаться с достаточно большой скоростью, надобность в стартере отпадает.

4. Реактивные двигатели используются в авиации, в боевых ракетах и ракетах, предназначенных для запуска спутников и космических кораблей. Боевые ракеты могут быть небольшими (с дальностью в несколько километров) и гигантскими, способными покрывать расстояния в тысячи километров. В авиации используются воздушно-реактивные двигатели, в боевых ракетах — как воздушно-реактивные, так и ракетные. Для полетов в межпланетном пространстве или в разреженных слоях атмосферы (например, при запуске спутников и космических кораблей) годятся только ракетные двигатели.

---

[1] Ротором называют вращающуюся часть турбины, электродвигателя, генератора и некоторых других машин.

ГЛАВА 9

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

§ 68. Работа

1. Если тело перемещается по прямой линии, то работой силы называют произведение силы на перемещение тела и на косинус угла между ними:

$$A = Fs\cos(\widehat{Fs}). \qquad (1)$$

Формула принимает более простой вид в трех частных случаях:

а) $\alpha = 0°$, $A = Fs$,
б) $\alpha = 180°$, $A = -Fs$,
в) $\alpha = 90°$, $A = 0$.

Первый случай означает, что интересующая нас сила направлена туда, куда движется тело, второй — что сила направлена в сторону, противоположную движению, а третий — что сила перпендикулярна направлению движения. Например, если мяч упал с некоторой высоты на землю и подскочил на ту же высоту, то при падении сила тяжести совершала положительную работу ($+mgh$), при отскоке — отрицательную ($-mgh$), а суммарная работа равна нулю. Если мяч катится по полу, то сила тяжести никакой работы не совершает (так как сила перпендикулярна направлению движения).

2. Формула (1) относится к случаю, когда сила и угол α были постоянными, а траектория — прямой линией. Если же эти величины менялись или траектория была криволинейной, то для расчета работы надо весь путь разбить на мелкие участки — настолько мелкие, чтобы силу и угол α на каждом участке можно было без заметной погрешности считать постоянными, а участок траектории — прямой линией. Затем надо рассчитать работу на каждом участке и полученные величины сложить. Таким образом, в более общем случае определением работы является формула:

$$A = F_1 \Delta s_1 \cos\alpha_1 + F_2 \Delta s_2 \cos\alpha_2 + \ldots F_n \Delta s_n \cos\alpha_n$$

$$\text{(т. е. } A = \sum_{k=1}^{n} F_k \Delta s_k \cos\alpha_k \text{)}. \qquad (2)$$

Путь в формуле (2), как мы уже упоминали, не обязательно должен быть прямым. Если тело двигалось зигзагами или криволинейно, то работа, как это определено формулой (2), равна алгебраической (а не векторной) сумме работ на отдельных участках. Стало быть, работа, по определению, есть величина скалярная.

3. Расчет работы переменной силы с помощью графика. Если сила постоянная и угол $\alpha = 0°$ или $180°$, то, как видно из рис. 90, площадь под графиком силы (в зависимости от перемещения) равна совершенной работе. Если сила не является постоянной, а меняется по произвольному закону (рис. 91), то для расчета надо (как уже указывалось) разбить весь путь на множество мелких участков и рассчитать работу на каждом участке, считая силу на данном участке постоянной. График силы в этом случае получается ступенчатым. Суммарная работа равна приблизительно площади под этим ступенчатым графиком. Чем меньше участки, тем меньше площадь ступенчатой фигуры будет отличаться от площади под данным графиком. При переходе к пределу совпадение будет точным. Таким образом, работа переменной силы (когда $\alpha = 0°$ или $180°$) равна площади под графиком $F(x)$[1].

4. Единица работы в Международной системе единиц (СИ) носит название джоуль (Дж). Джоуль — работа, совершаемая силой в 1 Н при перемещении тела на 1 м. Эта единица названа так в честь английского физика Джоуля.

---

[1] Строгим доказательством этого утверждения является тот факт, что площадь под кривой линией и работа определяются как предел одной и той же (с точностью до обозначений) суммы:

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum F_k \Delta s_k, \quad s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum y_k \Delta x_k.$$

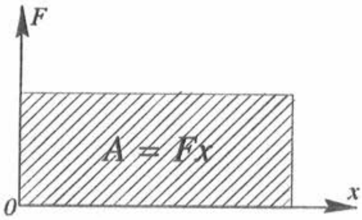


Рис. 90

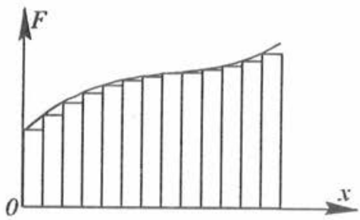


Рис. 91

§ 69. Задачи

1. Тело массой m скатилось с наклонной плоскости длиной l, образующей угол α с горизонтом (рис. 50). Сила трения равна $F_{тр}$, а упругая сила, действующая на тело со стороны плоскости, равна N. Какую работу совершили при этом сила тяжести, сила трения и сила упругости? (Ответ: $mgl\sin\alpha$; $-F_{тр}l$; 0).

2. Докажите, что если тело массой m скатилось с наклонной плоскости высотой h, то работа силы тяжести равнялась mgh.

Указание. Сначала докажите, что эта работа равна $mgl\sin\alpha$.

3. Спутник массой m вращается по круговой орбите радиуса R. Рассчитайте работу, совершенную силой тяжести: а) за пол-оборота; б) за полный оборот. (Ответ: в обоих случаях $A = 0$).

4. Учитывая, что работу можно определить, как скалярное произведение векторов: $A = \vec{F}\,\vec{s}$, докажите, что работа равнодействующей нескольких сил (например, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$) равна алгебраической сумме работ составляющих сил $A = A_1 + A_2 + A_3$.

5. Гирю массой 1 кг, лежащую на ладони, равномерно подняли вверх на 1 м. Какую работу совершила при этом: а) сила, с которой ладонь действовала на гирю; б) сила тяжести гири; в) равнодействующая этих двух сил.

6. Подъемный кран равномерно поднимает гранитную глыбу объемом 2 м^3 на высоту 10 м. Какую работу совершила сила, действующая со стороны троса на глыбу? Плотность гранита равна $2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

У к а з а н и е. Плотностью ρ, как известно из курса 7 класса, называется отношение массы тела к его объему $\rho = \frac{m}{V}$. (О т в е т: 500 кДж).

7. Наклонная плоскость имеет длину 5 м и высоту 3 м. Ящик массой 50 кг втаскивают равномерно от основания до вершины плоскости. Какую работу совершает “сила тяги”, если коэффициент трения равен 0,1?

У к а з а н и е. Сначала применить второй закон Ньютона и рассчитать силу тяги.
(О т в е т: $mgl(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 1700$ Дж).

8. Покоившийся груз массой 50 кг начали тянуть вверх за трос с постоянной силой 580 Н. Какую работу совершит эта сила за 2 с? (О т в е т: $\sim$ 1860 Н).

9. Линейку массой m и длиной l, лежащую на земле, подняли параллельно себе на высоту $l/2$, затем повернули вокруг ее центра тяжести так, чтобы линейка стала вертикально. Какую работу пришлось при этом совершить? (О т в е т: $A = mg\frac{l}{2} + 0 = mg\frac{l}{2}$).

10. Цепь массой m и длиной l была подвешена в колодце. Какую работу надо совершить, чтобы поднять ее наверх?

У к а з а н и е. Мы можем считать, что все отдельные участки цепи невесомы и что вся сила тяжести цепи приложена в одной точке — ее центре тяжести.
(О т в е т: $mgl/2$).

§ 70. Расчет работы упругой силы

1. Упругую силу можно определить как силу, величина которой пропорциональна величине деформации тела:

$$F = -kx.$$

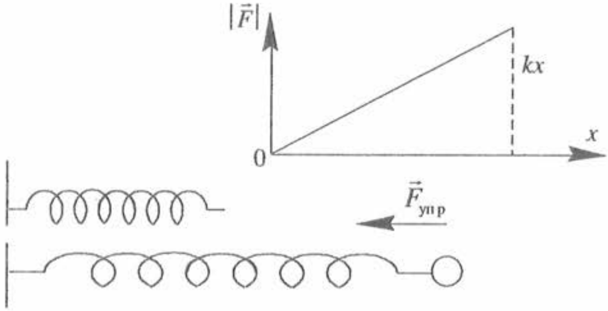


Рис. 92

Рассчитаем, какую работу совершает упругая сила, когда тело (например, растянутая пружина) возвращается из деформированного состояния в равновесное. Будем считать известными жесткость пружины k и величину деформации x. Ясно, что эта работа будет положительной, так как упругая сила, с которой пружина действует на внешние тела (например, на руку, удерживающую конец пружины), направлена в ту же сторону, что и перемещение тела (руки). Поскольку величина силы упругости в разных точках различна, формула $A = Fx$ здесь неприменима. Для расчета работы используем тот факт, что работа численно равна площади под графиком $F(x)$. Построив график этой зависимости (рис. 92), видим, что искомая работа равна $\frac{x \cdot kx}{2} = \frac{kx^2}{2}$, $A = \frac{kx^2}{2}$.

Упр. 1. Чтобы растянуть пружину на 3 см, надо приложить к ней силу в 20 Н. Какую работу пришлось совершить, чтобы растянуть ее до этого положения (из недеформированного состояния)? (О т в е т: 0,3 Дж).

Упр. 2. Начертите график зависимости $F(x)$ для пружины. Заштрихуйте на графике ту площадь, которую надо рассчитать, чтобы узнать, какую работу надо совершить, чтобы увеличить удлинение пружины от $x/2$ до x.

Упр. 3. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить удлинение пружины жесткостью k от x_1 до x_2?

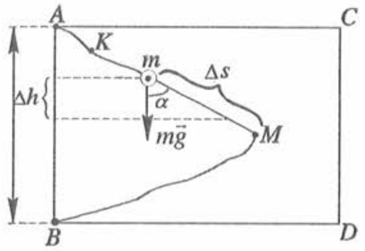


Рис. 93

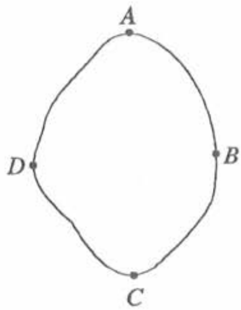


Рис. 94

Упр. 4. Для того, чтобы растянуть пружину динамометра от 0 до 10 Н, пришлось совершить работу 0,25 Дж. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть эту пружину от 10 до 20 Н? (О т в е т: 0,75 Дж).

§ 71. Особенность работы силы тяжести

1. Работа, совершенная силой тяжести при перемещении данного тела из одной точки в другую, не зависит от формы траектории, по которой перемещалось тело, и равна $\pm mgh$ (где h — высота одной точки относительно другой).

Для доказательства этого утверждения рассмотрим тело массой m, которое перемещали (или которое "само перемещалось") из точки A в точку B разными путями: сначала по вертикали AB, затем по ломаной $ACDB$ и, наконец, по произвольной кривой $AKMB$ (рис. 93). В первом случае работа силы тяжести равна mgh. Во втором случае на первом (горизонтальном) участке AC работа силы тяжести равна нулю, на втором (CD) равна mgh, на третьем (DB) — снова нулю; итого получается mgh. Рассмотрим теперь самый общий случай, когда траекторией является произвольная линия $AKMB$. Весь путь можно разбить на ряд мелких участков, где каждый можно рассматривать как маленькую наклонную плоскость. Работа на данном участке $\Delta A = mg\Delta s\cos\alpha = mg\Delta h$. Суммарная работа

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots \Delta A_n = mg\Delta h_1 + mg\Delta h_2 + \ldots mg\Delta h_n =$$
$$= mg(\Delta h_1 + \Delta h_2 + \ldots \Delta h_n) = mgh.$$

2. Силы, работа которых не зависит от формы траектории, называют потенциальными (так как для таких сил можно ввести понятие потенциальной энергии). Не только сила тяжести, но любые гравитационные силы являются потенциальными. Помимо гравитационных сил, потенциальными являются упругие силы и электрические (кулоновы) силы. Сила трения не является потенциальной, так как она всегда мешает движению, т. е. всегда отрицательна (и не обращается в нуль). Поэтому при увеличении длины траектории между двумя данными точками величина этой работы всегда возрастает (по модулю). Если мы один раз передвигали ящик по полу из одной точки в другую по кратчайшему пути, а другой раз сначала протащили его по всей комнате, прежде чем поставить, куда надо, то во втором случае работа, совершенная нами против сил трения, будет во много раз больше, чем в первом. Помимо сил трения, непотенциальными являются сила сопротивления воздуха (и любой другой среды), а также силы, возникающие при неупругих деформациях (т. е. таких деформациях, которые не исчезают после прекращения действия деформирующей силы; если такая деформация возникла при столкновении двух тел, то тела не отскакивают друг от друга, а “слипаются”).

Упр. 1. Надо доказать двумя разными способами, что если тело двигалось по замкнутому пути (т. е. вернулось в ту же точку, откуда вышло), то суммарная работа гравитационных сил на всем пути равна нулю. Разберитесь в приведенных ниже доказательствах.

а) Первое доказательство. Выберем на замкнутой траектории произвольную точку C (рис. 94).

$A_{ABCDA} = A_{ABC} + A_{CDA} = A_{ABC} + (-A_{ADC}) = 0.$

б) Второе доказательство. Работа гравитационных сил не зависит от формы траектории. Значит, работа на замкнутом пути будет такой же, как если бы тело двигалось из начальной точки А в конечную точку (тоже А) по кратчайшему пути, но в данном случае этот кратчайший путь равен нулю!

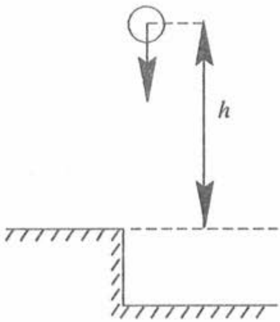


Рис. 95

§ 72. Потенциальная энергия тела, на которое действует сила тяжести

1. Пусть тело массой m сначала находилось на высоте h от некоторого уровня, который будем называть нулевым, а потом переместилось на этот уровень (рис. 95). Чем отличается первое положение от второго? Во-первых, изменилась высота, на которой находилось тело. Во-вторых, сила тяжести совершила работу mgh (независимо от того, какова была траектория перехода и сколько времени этот переход продолжался). Это дает возможность характеризовать различие этих положений с помощью особой величины, называемой потенциальной энергией. Потенциальной энергией тела[1] называют величину, равную той работе, которая была бы совершена силой тяжести, если бы тело переместилось из данной точки в ту, что условно принята за нулевую. Из этого определения следует, что потенциальная энергия тела выражается формулой

$$E_p = mgh.$$

2. Докажем, что прирост[2] потенциальной энергии тела при переходе из одного положения в другое равен работе силы тяжести, взятой с обратным знаком. Пусть, например, тело подняли с высоты h_1 до h_2. Работа, совершенная при этом силой тяжести, будет отрицательной (так как сила

[1] Надо говорить о потенциальной энергии не тела, а системы, состоящей из тела и Земли. Однако для краткости о Земле не упоминают (ее присутствие подразумевается).

[2] Приростом в математике и физике называют разность между последующим значением какой-либо величины и предыдущим. Например, если за сутки температура воздуха понизилась с +10 °С до +8 °С, то прирост температуры $\Delta t = 8 - 10 = -2$ °С.

тяжести направлена в сторону, обратную перемещению): $A_{1,2} = -mg(h_2 - h_1)$.

Прирост потенциальной энергии

$$\Delta E = E_2 - E_1 = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1).$$

Таким образом,

$$\Delta E_p = -A_{\text{силы тяжести}}.$$

3. О выборе нулевого уровня. Нулевой уровень можно выбирать произвольно. Например, если тело массой 1 кг лежит на столе высотой 1 м в комнате высотой 3 м, то его потенциальная энергия равна: а) нулю, если за нулевой уровень принять крышку стола; б) 10 Дж, если за нулевой уровень принять пол; в) –20 Дж, если за нулевой уровень принять потолок. Эту произвольность выбора можно сравнить с произвольностью выбора нулевого уровня при указании высоты. Например, если в комнате, о которой шла речь, надо установить штепсельную розетку на уровне крышки стола, то можно задать ее положение по-разному: а) на высоте нуль от крышки стола; б) на высоте 1 м от пола; в) на высоте –2 м от потолка. Хотя все эти числа разные, они правильно определяют выбранную нами точку. Из всех этих вариантов выбирают тот, что удобнее. Так поступают и при расчете потенциальной энергии.

Какова причина того, что произвольность выбора нулевого уровня не может мешать правильно решать физические проблемы? Дело в том, что во всех задачах, имеющих физический смысл, в ответы входит не величина потенциальной энергии тела, а разность энергий при двух положениях данного тела: $E_2 - E_1 = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1)$. Величина этой разности зависит от (h_2 – h_1), а эта величина (показывающая, на сколько одна точка выше другой) не зависит от выбора нулевого уровня.

Упр. 1. Что называется потенциальной энергией тела, на которое действует сила тяжести?

Упр. 2. Почему бы не дать более короткое определение термина “потенциальная энергия”, а именно: “Потенциальная энергия — это работа, совершаемая … и т. д.”?

(О т в е т. Тело обладает потенциальной энергией и в том случае, если никакой работы в данный момент не совершается. Работа характеризует некоторый процесс, а потенциальная энергия характеризует состояние тела).

Упр. 3. Маятник состоит из гири массой m, подвешенной на нити длиной l. Маятник отвели от положения равновесия на угол α. Рассчитайте потенциальную энергию маятника, приняв за нулевой уровень положение равновесия. Массой нити пренебречь. (О т в е т: $mgl(1 - \cos\alpha)$).

§ 73. Потенциальная энергия произвольной системы

1. Потенциальной энергией может обладать не только тело, на которое действует сила тяжести, но и растянутая или сжатая пружина или электрический заряд, взаимодействующий с другим зарядом. Таким образом, при определении потенциальной энергии надо добавить, что речь может идти не только о работе силы тяжести (которая является частным случаем гравитационных сил), но и о работе упругих сил или сил, действующих между электрическими зарядами. Все эти силы являются потенциальными, поэтому все эти случаи можно охватить такой формулировкой: потенциальной энергией тела называют величину, равную той работе, которая была бы совершена потенциальными силами (гравитационными, упругими, электрическими), если тело переместилось бы из данной точки в ту, что условно принята за нулевую. Выбор нулевой точки делается произвольно.

2. Докажем в общем виде, что прирост потенциальной энергии равен работе потенциальных сил, взятой с обратным знаком:

$$\Delta E_p = -A_{\text{пот.сил}}.$$

Для доказательства рассмотрим работу $A_{1,2}$, совершенную потенциальными силами, когда тело переместилось из точки 1 в точку 2. Так как работа здесь не зависит от формы траектории, можно перенести тело из 1 в 2 через нулевую точку 0:

$$A_{1,2} = A_{1,0} + A_{0,2} = E_1 - E_2 = -(E_2 - E_1),$$

что и требовалось доказать.

Упр. 1. Если тело массой m падает с высоты h, то на него, помимо силы тяжести, действует сила сопротивления воздуха. Чему равна потенциальная энергия тела? (О т в е т: при расчете потенциальной энергии учитывается только работа потенциальных сил: $E = mgh$).

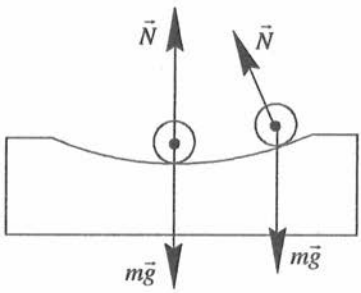


Рис. 96

§ 74. Потенциальная энергия упруго деформированного тела

1. Рассчитаем потенциальную энергию упруго деформированного тела, например, пружины жесткостью k, растянутой или сжатой на величину x. Согласно определению, эта энергия равна той работе, которую совершили бы силы упругости, если пружина пришла бы в "нулевое" положение. Естественно за нулевое принять положение, когда пружина не деформирована. Тогда работа будет равна (см. § 70) $\frac{kx^2}{2}$. Значит, $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

§ 75. Потенциальная энергия и устойчивое равновесие

По величине потенциальной энергии можно судить, является ли равновесие тела устойчивым или нет. Равновесие называется устойчивым, если при малом отклонении от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть тело в прежнее положение. Например, шарик на вогнутой подставке (рис. 96) находится в положении устойчивого равновесия. При малом отклонении от этого положения возникает сила, возвращающая его обратно. Легко понять, что равновесие является устойчивым, если центр тяжести тела находится в самом низком из возможных для него положений. При этом потенциальная энергия тела ми-

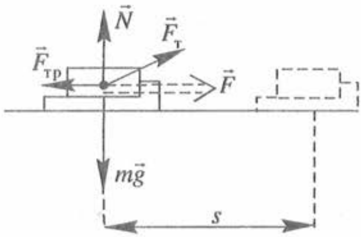


Рис. 97

нимальна. Таким образом, в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия тела минимальна. Этот признак годится и в тех случаях (например, при изучении взаимодействия молекул), когда сила тяжести никакой роли не играет и, стало быть, по положению центра тяжести нельзя делать никаких заключений о том, находятся ли тела в устойчивом равновесии или нет.

§ 76. Кинетическая энергия

1. Рассмотрим движущееся тело, на которое действуют силы (например, сила тяжести $m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}_т$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила упругости $\vec{N}$). Так как сил несколько, заменим их одной, равнодействующей $\vec{F}$ (рис. 97). Для простоты будем считать $\vec{F}$ постоянной (а угол между силой $\vec{F}$ и направлением движения $\alpha = 0°$ или $180°$), но вывод будет верен и для общего случая. Если тело переместилось на расстояние s, то работу равнодействующей силы на этом участке можно выразить так:

$$Fs = ma\frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow Fs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (1)$$

Величину $\frac{mv^2}{2}$ называют кинетической энергией тела:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа равнодействующей силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил (мы эту теорему примем без доказательства)[1]. Учитывая это, равенство (1) можно прочитать так: изменение кинетической энергии тела равно рабо-

[1] Указания к доказательству этой теоремы приведены в § 69 (4).

те, совершенной над телом всеми силами, действующими на него (потенциальными и непотенциальными).

$$\Delta E_k = A_{\text{всех сил}}.$$

Это утверждение называется теоремой о кинетической энергии.

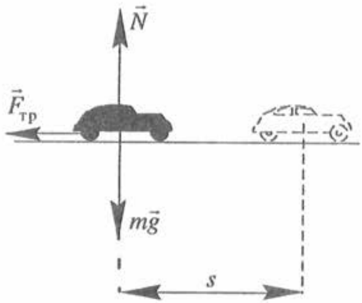


Рис. 98

Упр. 1. Камень брошен вертикально вверх. Как меняется в полете (увеличивается или уменьшается) потенциальная и кинетическая энергия камня?

§ 77. Примеры решения задач

1. Какую работу должна совершить равнодействующая всех внешних сил, чтобы увеличить скорость тела массой m: а) от 0 до v; б) от v до $2v$?

Р е ш е н и е. Применим теорему о кинетической энергии: $\Delta E_k = A_{\text{всех сил}}$. В первом случае подстановка в эту формулу дает $A_{\text{всех сил}} = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}$. Во втором случае $A_{\text{всех сил}} = \frac{m(2v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 3\frac{mv^2}{2}$.

2. Машина, двигавшаяся со скоростью 12 м/с, начала тормозить. Какой путь она пройдет при торможении, если коэффициент трения равен 0,4?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 98) и показываем все силы, действующие на машину. Согласно теореме о кинетической энергии $\Delta E_k = A_{\text{всех сил}}$.

Конечная кинетическая энергия равна нулю, начальная равна $\frac{mv^2}{2}$, работа силы тяжести равна нулю (так как она перпендикулярна перемещению), работа силы упругости

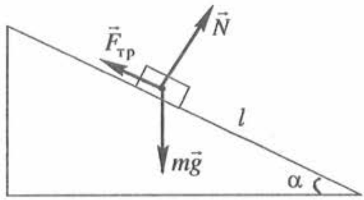


Рис. 99

N — тоже нуль, а силы трения $-F_{тр}s$. Подставляя все это в уравнение, получаем

$$0-\frac{mv^2}{2}=0+0-F_{тр}s,$$

где $F_{тр}=\mu N$. Из второго закона Ньютона следует, что $N-mg=0\Rightarrow N=mg\Rightarrow$ $\Rightarrow F_{тр}=\mu mg$. Подставляя это в полученное уравнение, получаем

$$-\frac{mv^2}{2}=-\mu mgs,$$

откуда $s=\dfrac{v^2}{2\mu g}$; $s=\dfrac{12^2}{2\cdot 0{,}4\cdot 10}=18$ м.

3. Санки, скатившись с горы со скоростью v, проехали по инерции по горизонтальному участку путь s. Какой путь они проехали бы по инерции, если их начальная скорость была бы вдвое больше? Коэффициент трения в обоих случаях одинаковый.

Решение. Делаем чертеж и, решая задачу так же, как предыдущую (проделайте все это сами), получаем уравнение:

$$\frac{mv^2}{2}=\mu mgs_1.$$

Если начальная скорость была $2v$, то уравнение будет таким:

$$\frac{m(2v)^2}{2}=\mu mgs_2.$$

Поделив второе уравнение на первое, получаем:

$$4=\frac{s_2}{s_1}\Rightarrow s_2=4s_1.$$

4. Наклонная плоскость имеет длину 4 м и составляет угол 30° с горизонтом. С вершины плоскости начинает скользить из состояния покоя брусок. Какова будет его скорость в самой нижней точке, если коэффициент трения равен 0,2?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 99) и проставляем на нем все силы, действующие на брусок. Применяем теорему о кинетической энергии: $\Delta E_k = A_{\text{всех сил}}$.

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории и равна $mgh = mgl\sin\alpha$; работа силы трения равна $-F_{\text{тр}}l$, а силы упругости — нулю. Подставляя в уравнение, получаем:

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = mgl\sin\alpha - F_{\text{тр}}l + 0, \qquad (2)$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N$. Применяя к бруску второй закон Ньютона и проектируя полученное векторное равенство на ось, перпендикулярную к наклонной плоскости, получаем:

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Отсюда $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Подставляя это в формулу (2), получаем:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\sin\alpha - \mu mgl\cos\alpha.$$

Отсюда $v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$, или после подстановки чисел $v = 5{,}1$ м/с.

5. Камень массой $m = 50$ г, брошенный под углом к горизонту со скоростью $v_1 = 18$ м/с с высоты $h = 20$ м, упал на землю со скоростью 24 м/с. Какую работу совершили при полете силы сопротивления воздуха?

Р е ш е н и е. На камень в полете действовали две силы: сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Работа силы тяжести не зависит от формы траектории и равна mgh. Поэтому, применяя теорему о кинетической энергии, получаем

$$\Delta E_k = A_{\text{всех сил}} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mgh + A_{\text{сопр}}.$$

Отсюда $A_{\text{сопр}} = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} - gh\right)$. Подставляя числа, получаем $A_{\text{сопр}} = -2{,}9$ Дж.

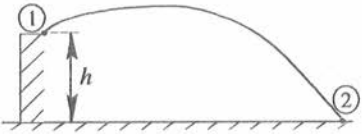


Рис. 100

6. Гиря массой m, снабженная внизу острым наконечником, падает с высоты h. На какую глубину b войдет в почву наконечник, если сила сопротивления почвы (средняя) равна F?

Р е ш е н и е. Применяем теорему о кинетической энергии $\Delta E_k = A_{\text{всех сил}}$.

В начальном положении кинетическая энергия тела равна нулю, в конечном — тоже. Подставляя эту и другие величины в уравнение, получаем $0 - 0 = mg(h + b) - Fb$, откуда $b = \dfrac{mgh}{F - mg}$.

§ 78. Задачи

1. Брусок, соскользнув с наклонной плоскости, обладал скоростью v. Каков должен быть коэффициент трения, чтобы путь, пройденный им по горизонтали до остановки, равнялся s? (О т в е т: $\dfrac{v^2}{2gs}$).

2. Пуля, попав в земляной вал, углубилась в него на расстояние s. На какое расстояние углубилась бы она, если бы начальная скорость пули была вдвое больше? Силу сопротивления почвы $F_{\text{сопр}}$ считать постоянной. (О т в е т: $4s$).

3. Санки, которые разогнали до скорости v, стали въезжать вверх по наклонной горке, угол наклона которой равен α. Какой путь проедут они до остановки, если коэффициент трения равен μ? (О т в е т: $\dfrac{v^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$).

4. Парашютист массой 80 кг отделился от неподвижно висящего вертолета и, пролетев до раскрытия парашюта путь 200 м, приобрел скорость 50 м/с. Найти работу силы сопротивления воздуха на этом пути. (О т в е т: –60 кДж).

§ 79. Закон сохранения механической энергии

1. Рассмотрим замкнутую систему, в которой действуют только потенциальные силы (т. е. отсутствуют трение, сопротивление среды и неупругие деформации). Если тела перемещаются, то эти силы совершают определенную работу. При этом $A_{\text{пот.сил}} = -\Delta E_p$, $A_{\text{всех сил}} = \Delta E_k$.

Поскольку по условию все силы в системе являются потенциальными, левые части этих двух выражений равны, значит, равны и правые части, т. е. $\Delta E_k = -\Delta E_p$ или $E_k^{(2)} - E_k^{(1)} = -(E_k^{(2)} - E_k^{(1)})$, откуда $E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(2)} + E_k^{(2)}$, где $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ означают начальные и конечные значения энергии соответственно.

Сумму потенциальной и кинетической энергии системы называют полной механической энергией. Таким образом, полная механическая энергия замкнутой системы тел остается неизменной, если в системе действуют только потенциальные силы (т. е. если нет трения, сопротивления среды и неупругих деформаций). Этот закон называют законом сохранения механической энергии.

§ 80. Примеры решения задач[1]

1. Камень брошен с высоты h под некоторым углом к горизонту. Скорость, которую сообщили камню в начальный момент, равна v_1. Какова будет скорость камня "в последний момент" перед тем, как он ударится о землю?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 100) и обозначаем первоначальное положение камня цифрой 1, а конечное — 2. Применяем закон сохранения механической энергии

$$E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(2)} + E_k^{(2)}.$$

Подставляя выражение для потенциальной и кинетической энергии, получаем:

[1] Во всех задачах этого и следующего параграфов предполагается, что сопротивление воздуха и трение отсутствуют.

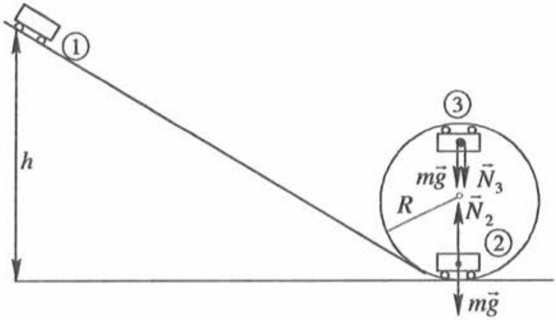


Рис. 101

$$mgh + \frac{mv_1^2}{2} = 0 + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Отсюда получаем $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$.

2. Тележка массой m начинает скатываться по наклонной дорожке, которая переходит потом в мертвую петлю радиуса R. С какой силой давит тележка на дорожку в самой нижней и в самой верхней точке петли, если начальная высота $h = 4R$?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 101) и показываем на нем силы, действующие на тележку в самой нижней и самой верхней точке петли. Обозначим начальное положение тележки цифрой 1, в самой нижней точке петли — 2, а в самой верхней — 3 и дважды применим закон сохранения механической энергии, чтобы найти скорость тележки в интересующих нас точках

$$E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(2)} + E_k^{(2)},$$

$$mg4R + 0 = 0 + \frac{mv_2^2}{2},$$

откуда $v_2 = \sqrt{8gR}$,

$$E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(3)} + E_k^{(3)},$$

$$mg4R + 0 = mg2R + \frac{mv_3^2}{2},$$

откуда $v_3 = 2\sqrt{gR}$ (последнее уравнение получилось бы несколько проще, если за нулевой уровень принять не самую нижнюю точку петли, а самую верхнюю; напишите уравнение для этого случая и проверьте, что ответ (v_3) получится таким же).

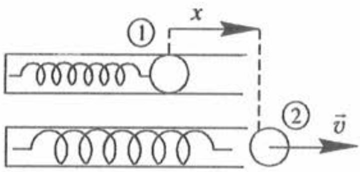


Рис. 102

Теперь остается применить второй закон Ньютона к тележке в положении 2 и в положении 3 (сделайте это сами).

(О т в е т: $N_2^{(1)} = 9mg$; $N_3^{(1)} = 3mg$).

3. С какой скоростью вылетит из горизонтально расположенного пружинного пистолета "снаряд" массой m, если жесткость пружины равна k, а сжатие x?

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 102), помечаем цифрами 1 и 2 начальное и конечное положение снаряда и пружины и применяем закон сохранения механической энергии к системе "пружина—снаряд":

$$E_p^{(1)} + E_k^{(1)} = E_p^{(2)} + E_k^{(2)},$$

$$\frac{kx^2}{2} + 0 = 0 + \frac{mv^2}{2},$$

откуда $v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$.

§ 81. Задачи

1. Одна шайба соскользнула (без трения) с наклонной плоскости высотой h, другая свободно падала с той же высоты. Одинаковыми ли будут скорости шайб в самой нижней точке?

2. Маятник, длина нити которого равна l, отвели от положения равновесия так, что нить образовала угол α с вертикалью, и отпустили. Какова скорость шарика в самой нижней точке траектории?

Указание. Сначала рассчитайте высоту, на которую был поднят шарик маятника, — она будет равна ($l - l\cos\alpha$). (Ответ: $\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$).

3. Тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0. Определите высоту наибольшего подъема тела, пользуясь законом сохранения энергии.

4. Мяч брошен вертикально вниз с высоты h. Какова должна быть начальная скорость мяча, чтобы после удара о пол он подскочил на высоту $2h$? Считать, что никакой потери механической энергии при ударе о пол не было. (Ответ: $\sqrt{2gh}$).

5. Гиря массой m подвешена к вертикальной нити. Гирю с ниткой отвели на 90° и отпустили. С какой силой будет натянута нить в тот момент, когда гиря проходит самую низкую точку своей траектории?

Указание. Сначала, пользуясь законом сохранения механической энергии и считая известной длину нити l, найдите скорость гири в самой низкой точке. (Ответ: $3mg$).

6. Тележка массой m начинает скатываться по наклонной дорожке, которая потом переходит в мертвую петлю радиуса R (рис. 101). С какой силой давит тележка на дорожку в самой верхней и в самой нижней точке петли, если начальная высота $h = 3R$? (Ответ: $7mg$; mg).

§ 82. Уменьшение механической энергии под действием трения

1. Рассмотрим замкнутую систему, в которой наряду с потенциальными силами действуют непотенциальные (силы трения, сопротивления среды и силы, возникающие при неупругих деформациях). Выпишем выражение для прироста потенциальной и кинетической энергии:

$$\Delta E_p = -A_{\text{пот.сил}},$$

$$\Delta E_k = A_{\text{всех сил}} = A_{\text{пот.сил}} + A_{\text{непот.сил}}.$$

Складывая оба выражения, получаем:

$$\Delta(E_p + E_k) = A_{\text{непот.сил}}.$$

Поскольку работа сил трения и других непотенциальных сил отрицательна ($A_{\text{непот.сил}} < 0$), механическая энергия замкнутой системы при наличии этих сил убывает. Во всех процессах, происходящих на Земле, действуют силы трения (и сопротивления среды), значит, этот вывод относится к любым замкнутым системам. Например, колебания маятника постепенно затухают, автомашина после выключения двигателя всегда останавливается, брошенное вверх тело обладает в момент падения меньшей кинетической энергией, чем в момент броска, а после удара о Землю (неупругий удар) эта энергия полностью исчезает.

2. Во всех случаях исчезновения механической энергии возникает равное количество энергии другого вида (см. § 84), так что общее количество энергии остается неизменным.

Упр. 1. Тележка массой m, двигаясь со скоростью v, налетела на неподвижную тележку массой $3m$ и сцепилась с ней. Рассчитайте, какое количество кинетической энергии при этом исчезло.

Указание. Сначала примените закон сохранения импульса и найдите скорость тележек после удара, затем рассчитайте кинетическую энергию тележек после удара и сравните ее с начальной энергией. (Ответ: $\frac{3}{8}mv^2$).

Упр. 2. Метеорит массы m налетел со скоростью v на крохотную планету (которую считаем неподвижной в инерциальной системе), масса которой в $k = 1\ 000\ 000\ 000$ раз больше массы метеорита. Какая доля первоначальной кинетической энергии осталась после столкновения?

Указание. Сначала примените закон сохранения импульса и узнайте скорость планеты с попавшим в нее метеоритом после удара. Затем найдите кинетическую энергию планеты с метеоритом и первоначальную кинетическую энергию метеорита. (Ответ: $\frac{1}{k+1}$, т. е. одна миллиардная доля).

§ 83. Изменение энергии системы под действием внешних сил

1. Рассмотрим снова систему тел, внутри которой действуют только потенциальные силы. Пусть эта система не является изолированной, т. е. на нее действуют внешние силы. Если тела, входящие в систему, перемещаются, то внешние силы совершают определенную работу. Рассчитаем, как изменится при этом энергия системы. Для этого снова выпишем выражения для ΔE_k и для ΔE_p.

$$\Delta E_k = A_{\text{всех сил}} = A_{\text{внутр}} + A_{\text{внешн}} = A_{\text{пот.сил}} + A_{\text{внешн}},$$

$$\Delta E_p = -A_{\text{пот.сил}}.$$

Складывая оба выражения, получаем

$$\Delta(E_k + E_p) = A_{\text{внешн.сил}}.$$

Таким образом, изменение полной механической энергии системы равно работе внешних сил.

Упр. 1. Пусть система состоит из Земли и гири массой m, лежащей неподвижно на руке на высоте H от Земли. Пусть рука начала действовать на гирю вверх с силой $3mg$ и подняла ее на добавочную высоту h. Согласно приведенной в этом параграфе теореме прирост энергии системы $\Delta E = 3mgh$. Проверьте этот ответ непосредственным вычислением (т. е. вычислите E_1, E_2 и $E_2 - E_1$).

Р е ш е н и е. В начальный момент $E_1 = mgH$. Когда на груз начала действовать внешняя сила, он стал двигаться вверх с постоянным ускорением $a = \dfrac{3mg - mg}{m} = 2g$. Его скорость в конечный момент можно рассчитать по формуле $v^2 = 2as = 2\cdot 2gh$. Кинетическая энергия в этот момент $E_k = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m4gh}{2} = 2mgh$, а потенциальная $E_p = mg(H + h)$. Полная механическая энергия системы после подъема груза $E_2 = 2mgh + mg(H + h) = mg(H + 3h)$. Изменение энергии $\Delta E = E_2 - E_1 = mg(H + 3h) - mgH = 3mgh$.

Упр. 2. Докажите, что если на систему, в которой действуют и потенциальные и непотенциальные силы, действуют внешние силы, то $\Delta(E_p + E_k) = A_{\text{внешн}} + A_{\text{непотенц}}$.

§ 84. Закон сохранения энергии

1. Помимо механической энергии существуют другие виды энергии: внутренняя, электромагнитная, ядерная и т. д. К сожалению, невозможно дать такое определение энергии любого вида, которое одновременно указывало бы на способ расчета этой энергии. Для начинающих изучать физику можно дать такое определение: энергией системы называется ее способность совершать работу (дальше в этом параграфе мы объясним, почему это определение нельзя признать вполне удовлетворительным).

Опытным путем было установлено, что при исчезновении механической энергии (например, при ударе камня о землю) меняется температура тел (камня, земли, воздуха). Это значит, что увеличивается кинетическая энергия молекул, из которых состоят эти тела. Их кинетическая энергия представляет часть так называемой внутренней энергии этих тел (другая часть — это потенциальная энергия взаимодействия молекул). Опытным путем было установлено, что при исчезновении механической энергии возникает равное количество внутренней энергии или энергии другого вида. Полная же энергия замкнутой системы остается постоянной при любых изменениях, происходящих внутри этой системы. Этот закон является обобщением огромного количества опытных фактов и является одним из наиболее надежно установленных законов природы. Его называют законом сохранения энергии.

2. Почему определение энергии как "способность совершать работу" является не вполне удовлетворительным? Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из камеры, в которой имеется водяное колесо (например, приводящее в движение жернова) и резервуар с водой, расположенный в верхней части камеры (рис. 103). Вода, падая вниз, заставляет колесо вращаться, совершая определенную работу.

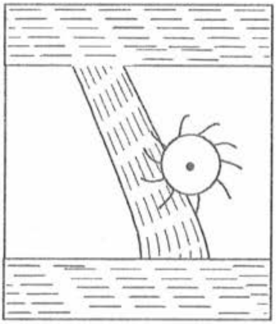


Рис. 103

Когда вся вода прольется вниз, "способность системы совершать работу" резко уменьшится, но полная энергия системы останется неизменной!

Иногда энергию определяют как "общую количественную меру движения и взаимодействия всех видов материи", но ясно, что такое "определение" не дает рецепта для вычисления величины энергии системы.

§ 85. Мощность

1. Одна и та же работа в разных случаях может совершаться за разное время. Например, чтобы поднять партию кирпичей под крышу высотного здания, рабочему потребовалась бы заметная доля часа, тогда как подъемный кран делает это за несколько секунд. Чтобы охарактеризовать это различие, вводят понятие мощности. Мощностью называется отношение работы к промежутку времени, за которое эта работа была совершена. При совершении работы всегда происходит превращение одного вида энергии в другой, поэтому мощность характеризует не только быстроту совершения работы, но и быстроту, с которой один вид энергии превращается в другой:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{\Delta E}{t}.$$

2. Если тело движется с постоянной скоростью v под действием постоянной силы, направленной туда, куда движется тело, то мощность, развиваемая этой силой,

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv.$$

3. Единица мощности в СИ носит название ватт (в честь английского изобретателя паровой машины Уатта). 1 Вт — такая мощность, когда за 1 с совершается работа в 1 Дж.

§ 86. Задачи

1. Какую мощность развивает человек массой 70 кг, если лестницу высотой 10 м он пробегает за 15 с? (О т в е т: ~ 470 Вт).

2. Какую работу совершает за одну минуту автомобильный двигатель мощностью 50 кВт? (О т в е т: 3 МДж).

3. Автомобиль массой 2 т движется по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч. Сила сопротивления движению составляет $\mu = 0{,}05$ от его веса. Определить, какую мощность развивает при этом двигатель.

У к а з а н и е. Использовать формулу $N = Fv$.
(О т в е т: 20 кВт).

4. Поезд массой 500 т поднимается со скоростью 36 км/ч в гору, уклон которой равен 0,001 (т. е. синус угла наклона равен 0,001). Коэффициент трения равен 0,004. Определить мощность, развиваемую тепловозом.

У к а з а н и е. Используйте формулу $N = Fv$. Силу тяги F найдите, пользуясь вторым законом Ньютона.
(О т в е т: $N = mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, но в данном случае $\cos\alpha \approx 1$, так что $N = mgv(\sin\alpha + \mu) = 250$ кВт).

§ 87. Коэффициент полезного действия

1. При совершении работы (или иначе: при расходовании энергии определенного вида) мы обычно, кроме нужных нам изменений состояния тел, получаем еще и ненужные, бесполезные для нас изменения. Например, поднимая автомобиль домкратом, мы не только поднимаем автомобиль, но еще бесполезно нагреваем домкрат вследствие трения. Таким образом, кроме полезной, мы совершаем еще лишнюю работу. Другими словами, полезная работа всегда меньше полной работы, совершенной двигателем (роль двигателя в нашем примере играла рука, вращающая рукоятку домкрата). Отношение полезной работы ко всей совершенной работе называется коэффициентом полезного действия данного устройства. Эту величину обозначают греческой буквой η ("эта"):

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{вся}}.$$

Можно сказать иначе: коэффициент полезного действия равен отношению полезно преобразованной энергии ко всей затраченной энергии. Можно, наконец, выразить коэффициент полезного действия как отношение мощностей (отношение полезной мощности ко всей мощности).

Коэффициент полезного действия (КПД) обычно выражают в процентах.

§ 88. Примеры решения задач

1. Подъемный кран поднял гранитную глыбу объемом 2 м^3 на высоту 12 м. Сколько электроэнергии израсходовал электродвигатель крана, если КПД двигателя вместе с механизмами крана η = 80%? Плотность гранита равна $2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. Полезной в этой задаче является работа по подъему груза: $A_{пол} = mgh$. Плотностью, как известно, называется отношение массы вещества к его объему $\rho = \frac{m}{V}$. Отсюда $m = \rho V$ и $A_{пол} = \rho Vgh$.

КПД можно определить как отношение полезно израсходованной (т. е. преобразованной) энергии ко всей израсходованной энергии. "Вся израсходованная" — это та, что получена электродвигателем от сети. Из формулы $\eta = \frac{E_{пол}}{E_{вся}}$ следует:

$$E_{вся} = \frac{E_{пол}}{\eta} = \frac{\rho Vgh}{\eta};$$

$$E_{вся} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 12}{0{,}8} = 750 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 750 \text{ кДж}.$$

§ 89. Задачи

1. Электродвигатель, приводящий в действие насос, потребляет из сети мощность 150 Вт. Каждую минуту насос подает 100 л воды с глубины 6 м. Каков КПД установки? Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

Указание. См. § 88 (1). (Ответ: 67%).

2. Каждую минуту на водяную полуигрушечную турбину падает 4,5 м^3 воды с высоты 2 м. Турбина развивает полезную мощность 1 кВт и приводит в движение электрический генератор, который питает энергией лампы общей мощностью 0,9 кВт. Плотность воды равна 1000 кг/м^3. Каков КПД: а) генератора; б) турбины; в) всей электростанции?

Указание. То, что для турбины является полезной мощностью, для генератора является всей потребляемой мощностью. (Ответ: 90%; 67%; 60%).

3. Для того, чтобы поднять на грузовую машину тяжелый ящик, его втащили на грузовик по наклонной доске. Каков КПД этой наклонной плоскости, если угол наклона был равен α, а коэффициент трения равен μ.

Указание. Сначала считайте, что дана масса ящика m и высота h, на которую его подняли. Полезная работа — это та, что совершена при непосредственном подъеме груза на высоту h, а полная работа — та, что совершила “сила тяги” при равномерном подъеме груза по доске.

(Ответ: $\eta = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \dfrac{1}{1 + \text{mctga}}$).

4. Одну и ту же доску можно располагать под разными углами к горизонту. При этом получаются наклонные плоскости с разными углами наклона. Не ссылаясь на выведенную в предыдущей задаче формулу, попробуйте с помощью простых соображений выяснить, как меняется КПД такой плоскости при увеличении угла наклона.

ГЛАВА 10

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

§ 90. Введение

1. До сих пор мы применяли законы механики к твердым телам. Но они применимы также к жидкостям и газам. Наблюдения показывают, что движение жидкостей и газов более сложно, чем движение твердых тел. Например, различные части воды в реке движутся с различными скоростями (в середине реки скорость больше, чем у берегов), в некоторых местах реки образуются воронки. Столь же сложно движение воздуха в атмосфере.

2. Законы движения жидкостей и газов почти одинаковы, так что будем изучать их совместно, для краткости упоминая только жидкости или только газы.

§ 91. Зависимость скорости жидкости от сечения струи

1. Рассмотрим течение жидкости по трубе, сечение которой в разных местах различно (рис. 104). Легко понять, что через каждое сечение ежесекундно протекает одинаковый объем воды. В самом деле, допустим, по трубе перекачивают молоко. Может ли быть, что в сечение S_1 ежесекундно поступает из молочной фермы 20 л молока, а к сечению S_2 прибывает только 5 л? Куда же каждую секунду исчезает 15 л? Им некуда деться, значит, через второе сечение ежесекундно протекает столько же жидкости, сколько и через первое. Не может быть и "обратного случая", когда через сечение S_2 протекает 5 л, а через нижеследующее сечение S_3 протекает 20 л. Это означало бы, что каждую секунду "из ничего" создается 15 л. Таким образом, через любое сечение трубы за единицу времени протекает одинаковый объем жидкости. Это утверждение применимо и к рекам, которые в одних местах могут быть широкими и глубокими, а в других — узкими и мелкими. Если река не имеет притоков, то количество воды, ежесекундно протекающее через любое сечение, будет одинаковым[1]. Для того, чтобы через узкое сечение ежесекундно протекало столько же жидкости, сколько через широкое, скорость ее в узком сечении должна быть больше, чем в широком. Чем уже сечение струи, тем больше в нем скорость жидкости.

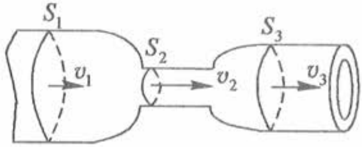


Рис. 104

§ 92. Зависимость давления жидкости от ее скорости

1. Давление измеряется силой, действующей на единицу поверхности перпендикулярно к ней:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Согласно закону Паскаля в неподвижной жидкости внешнее давление передается во все точки без изменения. Поэтому в неподвижной жидкости давление на данной глубине всюду одинаково. В движущихся жидкостях дело обстоит не так. Давление жидкости зависит от ее скорости: там, где скорость струи больше, давление меньше. Эта зависимость в математической форме впервые была установлена Даниилом Бернулли и называется законом Бернулли[2].

---

[1] Это утверждение относится к так называемому стационарному движению, когда скорость жидкости в данном сечении всегда постоянная. Если это не выполняется, например, от сечения S_2 реки вдруг начнут усиленно откачивать воду, то ее скорость в этом сечении увеличится, и из этого сечения начнет убывать больше воды, чем поступает из сечения S_1 (при этом река начнет мелеть). Если же, наоборот, перед сечением S_2 (ниже по течению) закроют ворота плотины, то скорость течения в сечении S_2 уменьшится, и через это сечение станет убывать меньше воды, чем прибывает ее через сечение S_1 (начнется наводнение).

[2] Даниил Бернулли (1700—1782) — академик Петербургской академии наук.

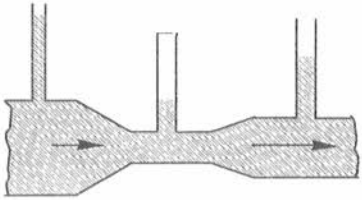


Рис. 105

В справедливости этого закона легко убедиться на опыте. Если трубку переменного сечения снабдить впаянными в нее тонкими открытыми трубками — манометрами (рис. 105) и подсоединить к водопроводному крану, то можно сравнивать давление в разных сечениях движущейся воды. Там, где трубка сужена, высота столбика воды в манометре меньше, чем в широких частях. Значит, и давление в этих местах меньше.

2. Закон Бернулли объясняется тем, что при переходе из узкой части трубы в широкую жидкость тормозится, как бы набегая на препятствие, поэтому степень сжатия ее растет. Наоборот, при переходе из широкой части в узкую жидкость имеет перед собой слои, которые убегают от нее с большей скоростью, чем движется жидкость, поэтому сжатие жидкости уменьшается.

Формально закон Бернулли можно вывести из второго закона Ньютона. Рассмотрим для этого столбик жидкости, который переходит из широкого сечения трубы в узкое (рис. 106)[1] . При переходе в узкое сечение скорость струи возрастает, стало быть, столбик движется ускоренно. Значит, равнодействующая всех сил, приложенных к столбику, не равна нулю, а направлена в сторону сужения. Отсюда следует, что давление на столбик с той стороны, где сечение шире, больше, чем с обратной стороны.

3. Зависимость давления в жидкости и газе от их скорости лежит в основе многих явлений и технических устройств. Приведем несколько примеров.

---

[1] На рисунке выделен объем в форме цилиндра. Конечно, такая форма выделенного объема сохраняется в трубе переменного сечения очень малое время, но для нашего рассуждения это не существенно.

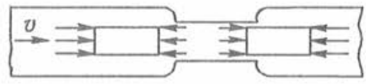


Рис. 106

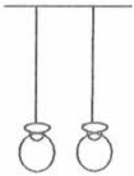


Рис. 107

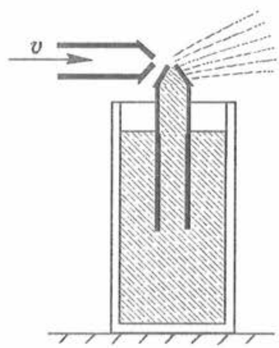


Рис. 108

а) Если дунуть между двумя подвешенными на нитях шариками или электрическими лампочками (рис. 107), то они сближаются, так как в местах сужения струи давление уменьшается. По сходной причине опасно стоять возле быстро несущегося поезда — может засосать.

б) Пульверизатор (рис. 108). У конца вертикальной трубки, опущенной в сосуд с жидкостью, создается струя воздуха. В месте, где струя обходит конец этой трубки, получается сужение струи, что вызывает уменьшение давления. Жидкость вдавливается в трубку атмосферным давлением и распыляется в струе воздуха. Подобным же образом устроены распылители, применяемые при окраске зданий, автомашин, электронной аппаратуры и других изделий.

в) Карбюратор. Так называется прибор, предназначенный для создания горючей смеси в автомобильных двигателях. При такте впуска в цилиндры всасывается атмосферный воздух. По пути в цилиндры воздух проходит через смесительную камеру С (рис. 109), в которой имеется суженная часть. В нее выведен конец трубки, соединенной с поплавковой камерой П, заполненной бензином. В месте сужения струи давление становится меньше атмосферного. Бензин выдавливается атмосферным давлением из поплавковой камеры, попадает в струю воздуха, распыляется и испаряется, образуя смесь паров бензина с воздухом (на рисунке показана еще дроссельная заслонка Д, регулирующая поступление горючей смеси в цилиндры).

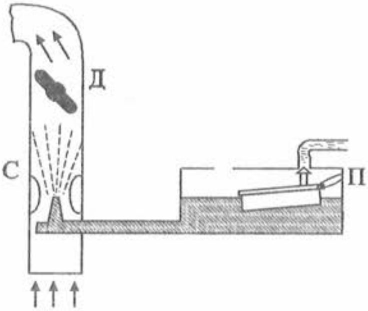


Рис. 109

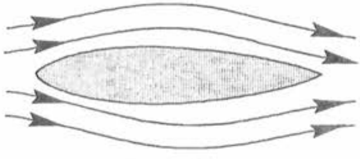


Рис. 110

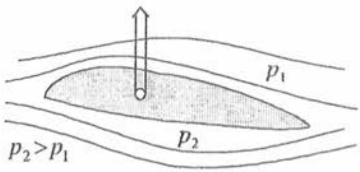


Рис. 111

Упр. 1. Пусть вода течет по горизонтальной трубе постоянного сечения с заметным трением. Примените второй закон Ньютона к столбику воды, мысленно вырезанному в струе, и объясните, одинаковым ли будет давление в разных сечениях трубы.

§ 93. Подъемная сила крыла самолета

1. На самолет, как и на любое другое тело, действует давление атмосферного воздуха ($p \approx 10^5$ Па на уровне моря). Если бы давление над верхней поверхностью крыла самолета стало на несколько процентов меньше, чем под крылом, то возникла бы заметная подъемная сила, которая при некоторых условиях могла бы стать больше веса самолета. Какова причина возникновения подъемной силы?

Если бы крыло было симметричным и угол атаки, т. е. угол, под которым поток набегает на крыло, был бы равен нулю (рис. 110), то вследствие симметрии скорость потока над и под крылом была бы одинаковой (мы за тело отсчета взяли не воздух, а крыло). Тогда и давление согласно закону Бернулли было бы одинаковым и сверху, и снизу, так что подъемная сила не могла бы возникнуть.

Если придать крылу несимметричную форму, а именно: сверху выпуклость сделать больше, чем снизу (рис. 111), то скорость потока над крылом получается больше, чем снизу даже при малых углах атаки (малые углы атаки выгодны потому, что сопротивление движению при этом минимально). Поэтому давление под крылом получается больше, чем над крылом, и возникает подъемная сила.

Теорию, позволяющую рассчитывать подъемную силу крыла, впервые создал русский ученый Н. Е. Жуковский в 1906 году.

Упр. 1. У современных самолетов давление над крылом на несколько процентов больше, чем под крылом. Какую массу груза может поднять за счет подъемной силы каждый квадратный метр крыла, если разность давлений составляет 6% от нормального атмосферного давления, равного $p = 10^5$ Па? (О т в е т: 600 кг).

Г Л А В А 11

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 94. Введение

Учение о колебаниях является основой радиотехники, акустики, оптики, атомной физики и многих других разделов физики и техники. Несмотря на различия между отдельными видами колебаний (например, между колебаниями маятника в часах и колебаниями электрического тока в телевизионной антенне), целый ряд понятий и закономерностей являются общими для всех типов колебаний. С наиболее важными из этих понятий можно познакомиться, наблюдая колебания обычного маятника.

§ 95. Величины, характеризующие колебательное движение

1. Если маятник отклонить от положения равновесия и отпустить, то он начнет качаться. Когда маятник качнется

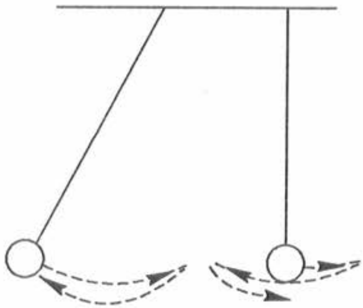


Рис. 112

из крайнего положения раз "туда" и раз "обратно" (рис. 112, слева), будем считать, что он совершил одно колебание. Отсчитывать колебание не обязательно от крайней точки. Можно начать отсчет от положения, когда маятник находился в средней точке (рис. 112, справа) или в любой другой точке. За одно колебание маятник должен дважды побывать в каждой точке: один раз, когда его скорость направлена в одну сторону, другой раз — в противоположную.

После того, как совершилось одно колебание, движение начнет повторяться. Эта повторяемость или, как говорят, периодичность является одним из основных признаков колебательного движения.

2. Время, за которое совершается одно колебание, называют периодом (обозначают T). Число колебаний за единицу времени называют частотой (ν). Если, например, одно колебание совершается за время $T = 0{,}5$ с, то за секунду будет сделано 2 колебания, так что

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

За единицу в Международной системе единиц (СИ) принята такая частота, когда за одну секунду совершается одно колебание. Эта единица называется герц (сокращенно Гц) в честь немецкого физика Генриха Герца (1857—1894).

3. Отклонение колеблющегося тела (в данном случае шарика маятника) от положения равновесия называют смещением (обозначают x). Смещение отсчитывают по тому пути, по которому двигался шарик маятника, т. е. по дуге окружности. Смещение считается положительным при отклонении в одну сторону и отрицательным при отклонении в противоположную сторону. Модуль наибольшего смеще-

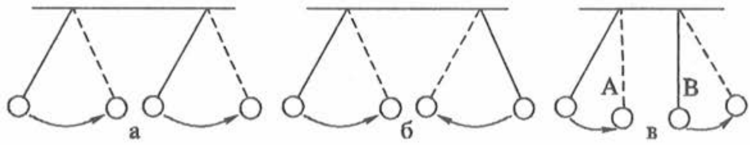


Рис. 113

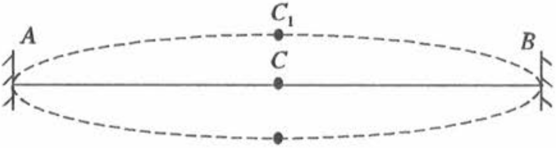


Рис. 114

ния называется амплитудой[1]. Из определения следует, что амплитуда всегда положительна.

4. Колебания одинакового периода могут отличаться друг от друга по фазе. Это означает следующее. Если два маятника одновременно проходят через положение равновесия, одновременно достигают крайне правых положений и т. д. (рис. 113а), то будем говорить, что эти маятники колеблются в одинаковой фазе[2]. При этом амплитуды колебаний не обязательно должны быть одинаковыми, они могут быть разными. Про маятники, показанные на рис. 113б, будем говорить, что они колеблются в противофазе (иначе можно сказать, что эти колебания сдвинуты по фазе на полпериода). У маятников, показанных на рис. 113в, колебания сдвинуты по фазе на четверть периода; это значит, что маятник В достигнет определенного состояния, например, наибольшего отклонения вправо на четверть периода раньше, чем маятник А. Колебания маятника А опережают по фазе колебания маятника В на четверть периода.

---

[1] Понятие "амплитуда" применяют не только к смещению, но и к другим колеблющимся величинам: к скорости, к ускорению, к силе тока и т. д. В общем случае амплитудой называют наибольшее значение (абсолютное) колеблющейся величины.

[2] Фазой называют число, показывающее, какая доля периода прошла от начала колебаний. Мы не будем использовать это определение.

Упр. 1. На рис. 114 показана струна, закрепленная в точках A и B. Если середину струны C отвести в точку C_1 и отпустить, то струна начнет колебаться. Рассчитайте: а) какой путь пройдет точка C струны за один период, если амплитуда колебаний этой точки равна 0,5 мм; б) какой путь пройдет эта точка за 1 с, если частота колебаний струны равна 300 Гц? (О т в е т: 2 мм, 600 мм).

Упр. 2. Маятник за время $t = 40$ с совершил $N = 10$ колебаний. Каков период колебаний этого маятника?

Упр. 3. Стальной шарик упал с высоты l, затем подпрыгнул на ту же высоту и т. д. (мы пренебрегаем сопротивлением воздуха и потерями энергии при ударе). Каков период колебаний такого шарика?

У к а з а н и е. Время падения равно времени подъема, так что период равен удвоенному времени падения.

(О т в е т: $T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$).

§ 96. Как возникают свободные колебания маятника

1. Чтобы маятник начал качаться, достаточно вывести его из положения равновесия и отпустить, т. е. только один раз подвергнуть его внешнему воздействию. После этого "колебательная система", состоящая из Земли и маятника, предоставлена только внутренним силам. Колебания, возникающие только под действием внутренних сил, называются свободными. Если же колебания совершаются под действием внешних, периодически меняющихся сил, то колебания называют вынужденными. Например, если точку, к которой подвешена нить маятника, раскачивать, то колебания будут вынужденными.

Рассмотрим, какие силы заставляют маятник, выведенный из положения равновесия, двигаться то в одну, то в другую сторону. На шарик маятника действуют две силы: сила тяжести mg и упругая сила растянутой нити Q_1 (рис. 115). Чтобы исследовать движение маятника, удобно разложить силу тяжести на две составляющие: касательную к траектории (F) и перпендикулярную к ней (Q_2). Силу Q_1 и

Q_2 можно заменить одной равнодействующей Q. Сила Q перпендикулярна к траектории. Такая сила не способна ни разгонять, ни тормозить движение шарика, она влияет только на направление движения, непрерывно отклоняя шарик от движения по касательной, т. е. сообщает ему центростремительное ускорение

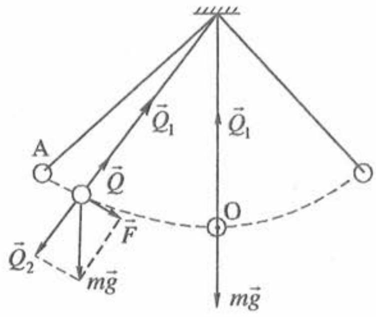


Рис. 115

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

Сила F на участке АО разгоняет шарик. При приближении к положению равновесия эта сила постепенно уменьшается и в точке О полностью исчезает. Но шарик в этой точке не остановится, он проскочит ее по инерции, после чего направление силы F изменится на обратное. Теперь сила F будет не разгонять, а замедлять движение шарика. В конце концов скорость шарика уменьшится до нуля, после чего она снова начнет возрастать, но уже в обратном направлении. Шарик снова проскочит среднюю точку и остановится в точке А. Затем все начнется сначала. Если бы сопротивление движению отсутствовало, то раз возникшие колебания продолжались бы неограниченно долго.

При всевозможных расчетах удобно считать, что шарик маятника одновременно обладает двумя ускорениями: центростремительным, вызванным силой ($Q_1 - Q_2$), и касательным, вызванным силой F. Полное ускорение шарика равно векторной сумме этих двух ускорений.

Упр. 1. В каких точках траектории маятника (рис. 115): а) касательное ускорение шарика максимально и минимально; б) центростремительное ускорение шарика максимально и минимально; в) скорость шарика максимальна и минимальна?

Упр. 2. Куда направлено полное ускорение шарика маятника (т. е. векторная сумма касательного и центростремительного ускорения): а) в крайней точке; б) в средней точке; в) в произвольной промежуточной точке?

Упр. 3. Маятник отвели на угол α от вертикали и отпустили. Чему равно: а) касательное ускорение в крайней точке; б) в средней точке; в) центростремительное ускорение в крайней точке; г) в средней точке?

(О т в е т: $g\sin\alpha$; 0; 0; $2g(1-\cos\alpha)$).

§ 97. Период колебаний математического маятника

1. Маятником можно назвать любое тело, способное колебаться: качели, люстру, подвешенную к потолку, и т. д. Самые простые закономерности получаются, если маятник состоит из маленького шарика, подвешенного на длинной, тонкой нити. Такой маятник называют математическим (строгое определение: математический маятник — это материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити).

Если подвесить два одинаковых математических маятника и дать им качаться, то, меняя данные одного из них, можно узнать, как это влияет на период колебаний. Эти опыты показывают, что период колебаний маятника: а) не зависит от амплитуды (при малых амплитудах); б) не зависит от массы; в) зависит от длины маятника и от ускорения свободного падения. Зависимость от ускорения свободного падения можно показать так. Шарик одного из маятников сделать из железа и поместить под ним магнит. Магнит, притягивая шарик, создает добавочное ускорение, направленное вниз. Это должно привести к такому же результату, как если бы ускорение силы тяжести в данном месте увеличилось.

Независимость периода от массы связана с тем, что ускорение свободного падения одинаково для легких и тяжелых тел. Если массу шарика увеличить, например, вдвое, то вдвое увеличится сила тяжести и все остальные силы, показанные на рис. 115. В результате касательное ускорение шарика $a = \frac{F}{m}$ во всех точках останется таким же, как раньше. Поэтому и скорость тяжелого шарика будет во всех точках такой же, как легкого. Ясно, что и время движения шарика не изменится.

2. Расчет показывает, что при малых амплитудах период свободных колебаний математического маятника выражается следующей формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Эту формулу впервые вывел голландский физик Гюйгенс, современник Ньютона. Период (и частоту) свободных колебаний называют собственным периодом (или собственной частотой) данной колебательной системы.

§ 98. Задачи

1. Проверьте формулу периода маятника по размерности. (Это означает следующее. Надо подставить в формулу наименования единиц длины и ускорения, произвести над ними указанные в формуле алгебраические действия и проверить, что в ответе получатся "секунды").

2. Какова должна быть длина математического маятника, чтобы период его колебаний равнялся одной минуте?

Указание. $\pi^2 \approx 10$.

3. Сколько колебаний совершит математический маятник длиной 5 м за 5 минут? (Ответ: ~ 68).

4. Имеются два математических маятника одинаковой длины. У одного из них амплитуда колебаний вдвое больше, чем у другого. Одинакова ли средняя скорость шариков этих маятников, когда они движутся от одной крайней точки к другой?

5. Математический маятник длиной l отвели на небольшой угол и отпустили. Что произойдет раньше: шарик этого маятника дойдет до положения равновесия или другой шарик, который одновременно начал свободно падать с высоты l, упадет донизу?

6. Во сколько раз надо изменить длину математического маятника, чтобы период колебаний уменьшился вдвое?

7. За то время, за которое первый маятник сделал 10 колебаний, второй сделал 20 колебаний. У какого из них длина больше? Во сколько раз?

8. За одно и то же время один математический маятник делает 50 колебаний, а второй 30. Найти их длины, если один из них на 32 см длиннее другого. (О т в е т: 18 см; 50 см).

9. Как изменится ход часов с маятником на металлическом стержне: а) при повышении температуры; б) при поднятии на гору; в) при перемещении от полюса к экватору?

10. Как изменится период свободных колебаний математического маятника, если перенести его с Земли на Марс? Масса Марса примерно в 10 раз меньше массы Земли, а радиус вдвое меньше, чем у Земли. (О т в е т: увеличится в 1,6 раза).

§ 99. График колебаний маятника

1. Движение, где скорость непрерывно меняется, удобно изучать с помощью графиков. По горизонтальной оси откладывают время, а по вертикальной — координату точки. Можно добиться, чтобы колеблющееся тело само рисовало график своего движения. Как это сделать в случае маятника, показано на рис. 116. Роль гирьки маятника играет воронка, заполненная чернилами. Если расположенный под воронкой лист бумаги равномерно двигать, на нем появляется волнистая линия, которая и является графиком смещения в зависимости от времени[1]. На рис. 117 этот график показан отдельно. В теории колебаний доказывается, что эта линия является синусоидой. Это значит, что при соответствующем выборе масштаба по горизонтальной и по вертикальной оси эта линия точно наложится на синусоиду.

[1] При малых амплитудах (только такие случаи мы рассматриваем) можно пренебречь разницей между величиной смещения гирьки маятника и длиной соответствующей полухорды.

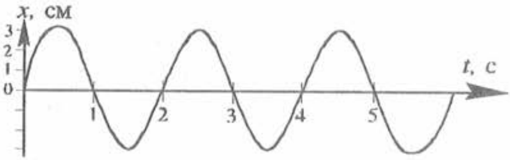
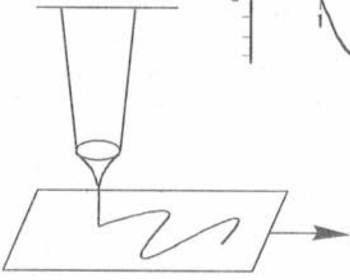


Рис. 117



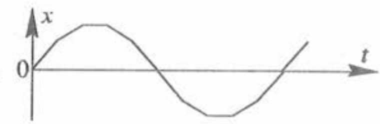


Рис. 116

Рис. 118

В технике синусоиду называют иногда гармоникой. Колебания, графиком которых является синусоида, называют гармоническими. Этот тип колебаний чаще всех других встречается на практике. Примерами гармонических колебаний являются колебания маятника (при малых амплитудах), колебания груза, подвешенного к пружине, колебания электрического тока в цепях переменного тока и т. д.

Упр. 1. Шарик маятника взяли в руку и начали равномерно двигать его по тому пути, по которому он обычно колеблется. В крайних точках поворот совершался мгновенно, после чего движение вновь становилось равномерным. Начертите, как примерно будет выглядеть график колебаний $x(t)$ этого маятника.

Упр. 2. Опишите, как двигалось на отдельных участках тело, график движения $x(t)$ которого изображен на рис. 118.

Упр. 3. На рис. 117 показан график гармонических колебаний маятника. Определите по графику: а) амплитуду колебаний; б) участки, где маятник двигался вправо, и участки, где он двигался влево (ось x направлена вправо от положения равновесия); в) период колебаний; г) точки, где скорость маятника была наибольшей.

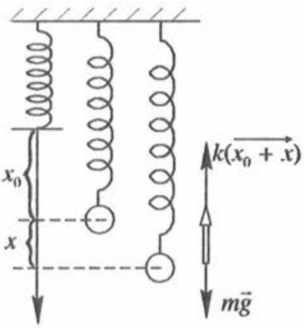


Рис. 119

Упр. 4. Начертите от руки (на одних и тех же осях) графики колебаний $x(t)$ двух маятников, периоды колебаний которых одинаковы: а) оба маятника колеблются в одной фазе, но амплитуда колебаний первого маятника вдвое больше, чем второго; б) амплитуды обоих маятников одинаковы, но колебания первого маятника опережают на четверть периода колебания второго маятника; в) амплитуды обоих маятников одинаковы, но они колеблются в противофазе.

Упр. 5. Начертите от руки (на одних и тех же осях) графики колебаний $x(t)$ двух маятников. Амплитуды колебаний у них одинаковы, но у первого частота вдвое больше, чем у второго.

§ 100. Колебания груза на пружине

1. Если груз, подвешенный на пружине (рис. 119), отвести от положения равновесия и отпустить, то он начнет колебаться. Чтобы выяснить, какие силы заставляют груз колебаться, сначала рассмотрим более простой случай, когда пружина (или лучше две пружины) расположены горизонтально (рис. 120). Тогда сила тяжести не будет играть никакой роли в создании сил, вызывающих колебания (если трением можно пренебречь, что мы и будем предполагать).

Если груз отвели в сторону, например, вправо, то возникнет упругая сила, направленная к положению равновесия $F = -kx$ (где x — смещение груза, k — совместная жесткость обеих пружин). Если груз отпустить, то под действием этой силы он начнет двигаться. В средней точке эта сила обратится в нуль, но груз не остановится, он по инерции будет двигаться дальше. Тогда на груз снова начнет действовать упругая сила, но теперь она будет направлена в обратную сторону (т. е. влево) и будет не разгонять, а за-

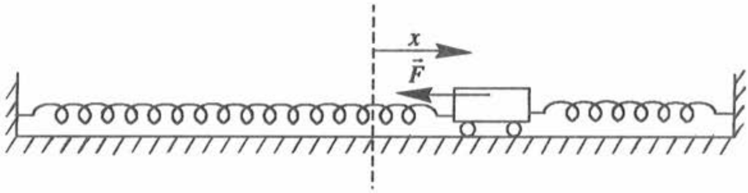


Рис. 120

медлять движение груза. В конце концов он остановится, после чего начнет двигаться в обратную сторону и т. д.

2. Если груз подвешен на пружине, то, помимо силы упругости, на его колебания будет влиять сила тяжести. Ее действие можно исключить из рассмотрения таким приемом. Пусть в положении равновесия пружина удлинилась на расстояние x_0 от недеформированного положения (рис. 119). Ясно, что в положении равновесия $mg = kx_0$. Если пружину растянуть еще на расстояние x, считая от этой точки, то равнодействующая всех сил, приложенных к грузу, будет равна

$$F = -k(x_0 + x) + mg = -kx_0 - kx + mg = -kx.$$

Таким образом, если начало координат поместить в точку, соответствующую положению равновесия, то все будет происходить так, как если бы на груз действовала только упругая сила пружины $F = -kx$.

3. Период колебаний "пружинного маятника" зависит от массы груза и от жесткости пружины. В самом деле, если при данном растяжении пружин (рис. 120) заменить данный груз другим, у которого масса вдвое больше, то ускорение груза в этой и в любой другой точке станет вдвое меньше, чем раньше. Он будет медленнее разгоняться и медленнее тормозиться, чем легкий груз. Ясно, что период колебаний станет больше. Если теперь представить, что мы заменили пружины более "сильными", например, такими, у которых жесткость k вдвое больше, чем у прежних, то при данном смещении упругая сила удвоится. Ускорение груза в этой и в любой другой точке станет вдвое больше, чем раньше. Груз будет быстрее разгоняться и быстрее тормозиться, чем раньше. Период колебаний уменьшится.

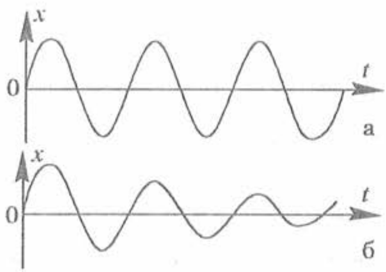


Рис. 121

Упр. 1. Амплитуда колебаний пружинного маятника равна $X_м$. Предположим, что ускорение груза все время, пока груз двигался от крайней точки к средней, является постоянным — таким, каким оно было в крайней точке: $a = \frac{F}{m} = \frac{kX_м}{m}$. За какое время (при таком предположении) груз проходил бы расстояние от крайней точки до средней? Учитывая, что это время составляет четверть периода, рассчитайте, чему равен был бы период колебаний. (О т в е т: $T = 5{,}6\sqrt{\frac{m}{k}}$).

Упр. 2. Проверьте выведенную в предыдущем упражнении формулу по размерности.

§ 101. Превращение энергии при колебательном движении

1. При механических колебаниях происходит попеременный переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Например, когда маятник движется к положению равновесия, его потенциальная энергия mgh убывает (так как гирька маятника опускается), а кинетическая $\frac{mv^2}{2}$ растет (так как скорость гирьки растет). Когда маятник удаляется от положения равновесия, происходит обратный переход кинетической энергии в потенциальную. Если потерь энергии нет, то маятник в крайних положениях должен каждый раз достигать первоначальной высоты (так как кинетическая энергия в крайних положениях маятника равна нулю, а полная механическая энергия маятника есть величина постоянная). Таким образом, амплитуда колебаний должна оставаться неизменной. Такие колебания называют незатухающими. График их показан на рис. 121а.

2. Свободные колебания всегда являются затухающими (рис. 121б), так как за каждый период колеблющееся тело теряет часть своей энергии. Потеря энергии происходит двумя путями:

а) часть энергии расходуется на преодоление трения и сопротивления воздуха, т. е. переходит во внутреннюю энергию воздуха, маятника и оси вращения;

б) всякое колеблющееся тело заставляет колебаться окружающую среду (воздух, воду и т.п.), передавая ей часть своей энергии ("излучает энергию"). Например, колебания брошенной в воду щепки затухают так быстро потому, что вода вокруг щепки также приводится в колебательное движение.

Упр. 1. Пружинный маятник (рис. 120) состоит из груза массой m и пружин, совместная жесткость которых равна k. Груз отвели от положения равновесия на расстояние x и отпустили. Какова будет скорость груза: а) в момент, когда он проходит положение равновесия; б) в момент, когда смещение равно x_1? (О т в е т: $x\sqrt{\frac{k}{m}}$; $\sqrt{\frac{k(x^2 - x_1^2)}{m}}$).

Упр. 2. Математический маятник, длина нити которого равна l, отвели на угол α от положения равновесия и отпустили. Какова будет скорость гирьки маятника в тот момент, когда он проходит положение равновесия?

(О т в е т: $\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$).

Упр. 3. Два одинаковых цилиндрических сосуда, стоящих рядом, соединены внизу трубкой, снабженной краном. Один сосуд пустой, другой заполнен до уровня h жидкостью, масса которой m. Когда открыли кран, жидкость начала переливаться в другой сосуд, и некоторое время продолжались колебания жидкости. Какое количество внутренней энергии выделится к моменту, когда колебания полностью затухнут? (О т в е т: $\frac{mgh}{4}$).

§ 102. Вынужденные колебания. Резонанс

1. Вынужденными называют колебания, вызванные периодически меняющейся внешней силой. Примером таких колебаний являются колебания фундамента, на котором установлен двигатель, колебания железнодорожных вагонов при ударах о стыки рельсов, колебания корпуса теплохода под действием периодических толчков со стороны двигателей или под действием набегающих волн, колебания мембраны в слуховой трубке телефона (рис. 132) и т. д.

При свободных колебаниях период колебаний определяется только свойствами колебательной системы. При вынужденных колебаниях это не так. Только после первых толчков система начинает колебаться с собственной частотой, но эти собственные колебания постепенно затухают, и через некоторое время внешняя сила навязывает системе свою частоту. Например, у мембраны телефона есть собственная частота, но она колеблется не так, как "ей самой хочется", а так, как приказывает электромагнит.

2. Если частота внешней силы, действующей на колебательную систему, изменится, то изменится не только частота вынужденных колебаний, но и их амплитуда. Наибольшая амплитуда будет в том случае, когда частота внешней силы совпадает с собственной частотой системы. Каждый знает, как легко раскачать качели даже малой силой, если раскачивать их в такт собственным колебаниям. В этом случае каждый толчок помогает качелям раскачиваться, и только наличие вредных сопротивлений и особенности конструкции качелей мешают амплитуде расти беспредельно. Если же ударять по качелям с той же силой, но с другой частотой, то только часть толчков будет делаться вовремя, помогая качелям раскачиваться. Другая часть придется на те моменты, когда качели летят навстречу. Такие толчки не помогают, а мешают качелям раскачиваться. Ясно, что амплитуда колебаний будет меньше, чем в первом случае.

Чтобы установить количественные закономерности (зависимость амплитуды от частоты), можно собрать установку, показанную на рис. 122. Она состоит из пружинного маятника, верхняя часть которого подвешена к коленчатому

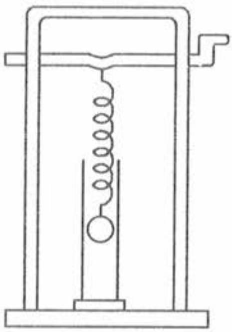


Рис. 122

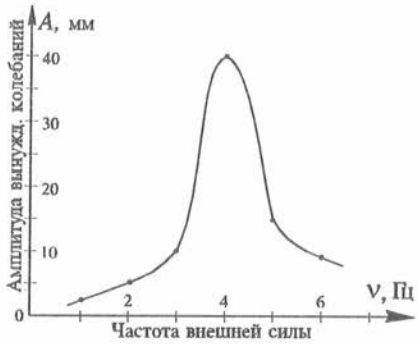


Рис. 123

валику. Если вращать ручку валика с некоторой постоянной частотой, то грузик начнет совершать вынужденные колебания такой же частоты. Если вращать ее с другой частотой, то изменится не только частота колебаний груза, но и амплитуда этих колебаний. Измеряя каждый раз установившуюся амплитуду колебаний, мы сможем выяснить интересующую нас зависимость. Результаты одной серии опытов сведены в таблицу:

Частота внешней силы, Гц	1	2	3	4	5	6	7
Амплитуда колебаний, мм	2	4	10	40	15	8	5

Собственная частота колебаний этого маятника составляла 4 Гц. По данным этой таблицы построен график (рис. 123). На нем отчетливо видно, что при совпадении частоты внешней силы с собственной частотой маятника амплитуда резко возрастает. Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний в результате совпадения частоты внешнего воздействия с собственной частотой колебаний данной системы называется резонансом. График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы называют кривой резонанса. Чем меньше трение (сопротивление движению), тем более острой получается кривая резонанса.

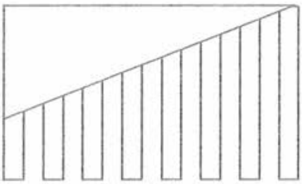


Рис. 124

3. Резонанс играет важную роль в технике, иногда вредную, иногда полезную. Бывали случаи, когда в результате резонанса разрушались самолеты, мосты и другие сооружения. Объясняется это тем, что отдельные части сооружений могут колебаться с определенными собственными частотами. Например, у самолетов могут возникать колебания крыльев, хвостового оперения, фюзеляжа и т. д. Если в результате работы двигателя самолета или других причин возникнут толчки, частота которых совпадет с одной из этих частот, они могут стать опасными. Чтобы избежать резонанса, выбирают такие размеры машин и их частей, при которых частота их собственных колебаний далека от частоты толчков. В Петербурге в начале этого столетия разрушился мост, по которому проходил эскадрон конницы ("Египетский мост" через Фонтанку обрушился в 1906 г., восстановлен в 1955 г.). Четкий шаг лошадей, отлично обученных парадному маршу, попал в резонанс с частотой собственных колебаний моста. Мост рухнул, хотя был рассчитан на нагрузку, в сто раз превышающую вес эскадрона. Подобные случаи были и в других странах, поэтому при переходе войск через мосты (и на верхних этажах зданий) им запрещено ходить "в ногу".

Явление резонанса используется в частотомере. Он состоит из набора стальных пластинок, закрепленных с одного конца. Над каждой пластинкой указана частота ее собственных колебаний (рис. 124). Если поставить прибор на колеблющееся тело, то все пластинки начнут колебаться. Амплитуда колебаний одной из пластинок будет во много раз больше, чем у остальных. Ясно, что частота колебаний испытуемого тела совпадает с собственной частотой колебаний этой пластинки.

Упр. 1. Что откладывается на горизонтальной и на вертикальной оси кривой резонанса?

Упр. 2. Подвесьте к палке три грузика на нитках разной длины (три маятника). Если палку взять в руки и начать ее раскачивать, все три маятника начинают раскачиваться. Сделайте так, чтобы сильнее всех раскачивался: а) самый длинный маятник; б) самый короткий; в) средний. Объясните, как этого достичь.

ГЛАВА 12

ВОЛНЫ. ЗВУК

§ 103. Понятие о волновом движении

1. Рассмотрим, что произойдет, если возбудить колебания в одном участке упругой среды, т. е. такой среды, где при изменении формы или объема данного участка возникают силы, стремящиеся вернуть его в первоначальное состояние. Простейшим примером упругой среды может служить цепочка шариков, соединенных друг с другом пружинками (рис. 125). Если начать раскачивать один из шариков, например, крайний, то возникающие при этом упругие силы начнут раскачивать соседний шарик, а затем и более далекие шарики. Через некоторое время станут колебаться все части цепочки. Сходные явления происходят в любом другом упругом теле, например, в резиновом шнуре, один конец которого начали раскачивать. Отдельные участки шнура связаны друг с другом упругими силами, поэтому колебания, возникшие в одном месте шнура, передаются остальным участкам. Передача колебаний от точки к точке называется волновым процессом или волной.

2. Если первая частица получила только один толчок, то ее колебания быстро затухнут, так как за счет энергии этой частицы возникнут колебания смежных частиц. Так же быстро будут затухать колебания и остальных частиц. Если же первую частицу непрерывно раскачивать, то ее колебания будут непрерывно передаваться соседним частицам, и вдоль цепочки будут непрерывно передаваться колебания. Другими словами, по цепочке непрерывно будет распространяться волна.

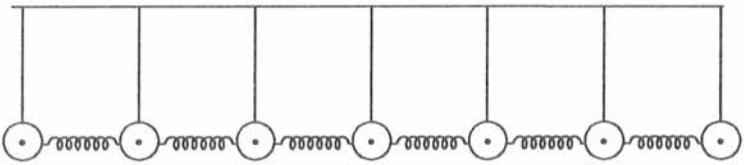


Рис. 125

3. Характерной особенностью волнового движения является то, что, хотя движение (а с ним и энергия) может передаваться на большие расстояния, ни одна частица не уходит далеко от своего положения равновесия. В случае цепочки или шнура это очевидно, но это верно и во всех других случаях. Например, волна от прошедшего по реке теплохода может дойти до берега, но щепка, оказавшаяся на пути волны, не бежит вместе с ней к берегу, а качается на одном месте.

4. Колебания каждого следующего участка цепочки запаздывают по фазе относительно колебаний предыдущего участка. Причиной является то, что любое тело (в данном случае — шарик) обладает определенной инертностью. Это значит, что требуется определенное время, чтобы тело, на которое подействовала сила, набрало определенную скорость и прошло определенное расстояние. Чем дальше расположен шарик, тем позже он начнет колебаться и тем больше будут отставать по фазе его колебания от колебаний "источника".

§ 104. Поперечные и продольные волны

1. Направление распространения колебаний называют лучом. Если частицы колеблются перпендикулярно лучу, волна называется поперечной, если вдоль — продольной. Волна в цепочке шариков может быть либо поперечной, либо продольной. Если раскачивать крайний шарик поперек цепочки (т. е. то приближать его к нам, то удалять от нас — см. рис. 126), волна будет поперечной, а если раскачивать вдоль цепочки — волна будет продольной. Волны на поверхности воды являются поперечными (точнее, почти

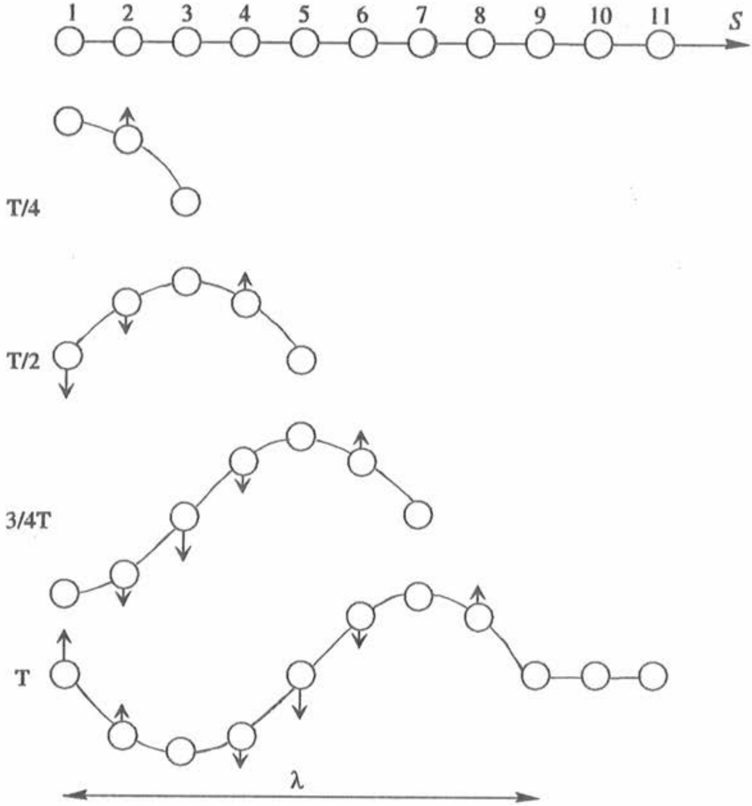


Рис. 126

поперечными, так как каждая частица воды колеблется не строго вертикально, а описывает замкнутую кривую линию).

2. Выясним, какую форму принимает цепочка в разные моменты времени, когда по ней начала распространяться поперечная волна. Скорость распространения волны одинакова на всех участках, так как свойства цепочки на одном участке не отличаются от ее свойств на других участках. Будем отмечать положение шариков каждые четверть периода. Результаты изображены на рис. 126.

а) За начальный момент мы выбрали тот, когда первая частица начала свое движение. Пусть скорость волны такова, что за каждую четверть периода колебания от данной частицы успевают дойти до третьей частицы.

б) Через четверть периода первая частица совершила четверть полного колебания, т. е. отклонилась до отказа вверх (на графике). Частица 3 начала свое движение.

в) Прошло еще четверть периода (т. е. $\frac{T}{2}$ от начального момента). Частица 1 вернулась в положение равновесия и движется вниз. Частица 3 за четверть периода, прошедшего от начала ее движения, достигла максимального отклонения, а частица 5 начала свое движение.

г) Прошло еще четверть периода (т. е. $\frac{3T}{4}$ от начального момента). Частица 1 отклонилась до отказа в обратную сторону и т. д. (продолжите рассказ сами, включая и момент T).

Мы видим, что цепочка, по которой распространяется поперечная волна, принимает форму "волнистой" линии, состоящей из горбов и впадин. Эта линия одновременно является графиком зависимости смещения частиц от расстояния $x(s)$ в данный момент времени. Если источник колебаний совершает гармонические колебания, то этот график также будет синусоидой (если пренебречь постепенным уменьшением амплитуды с увеличением расстояния от источника).

3. В случае продольных волн цепочка остается практически прямой, никаких горбов и впадин на ней не возникает. В одних местах частицы сближаются друг с другом, в других (в тот же момент) расходятся. Но и в этом случае на графике зависимости смещения от расстояния мы смещение будем откладывать по вертикальной оси, так что на графике будут горбы и впадины.

§ 105. Скорость волны. Длина волны

1. Колебания передаются от точки к точке с определенной скоростью. Чтобы измерить скорость волны, например, на воде, можно измерить скорость фронта волны, т. е. поверхности, отделяющей область, куда колебания еще не

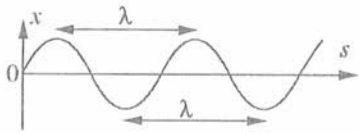


Рис. 127

дошли, от области, где они уже происходят. Если фронт волны находится далеко от наблюдателя, можно следить за скоростью гребня или впадины. Скорость перемещения гребня — это не скорость колеблющейся частицы, а скорость распространения определенной фазы колебаний — фазы, соответствующей наибольшему отклонению частицы от положения равновесия. Таким образом, скорость волны — это скорость распространения определенной фазы колебаний.

2. Расстояние, которое пробегает волна за один период, называется длиной волны (рис. 126 и 127). Поскольку в однородной среде скорость волн постоянна[1], для расчета длины волны надо применить формулу равномерного движения $s = vt$. Обозначив длину волны буквой λ (греческая буква "лямбда"), получаем $\lambda = vT$.

3. Из рис. 126 видно, что точка, отстоящая на расстояние λ от данной точки, колеблется в одинаковой с ней фазе. Таким образом, длину волны можно определить еще иначе: это кратчайшее расстояние между двумя точками, колеблющимися в одинаковой фазе (и расположенными на одном луче).

Упр. 1. По поверхности воды в озере волна распространяется со скоростью 6 м/с. Каков период и частота колебаний щепки на воде, если длина волны 3 м?

Упр. 2. На поверхности воды распространяется волна со скоростью 2,4 м/с при частоте колебаний 2 Гц. Каково кратчайшее расстояние между двумя точками, лежащими на одном луче и колеблющимися: а) в одинаковой фазе; б) в противофазе?

Упр. 3. Скорость радиоволн $c = 300\ 000$ км/с. Какова частота колебаний, если длина волны $\lambda = 30$ м? (О т в е т: 10 МГц).

---

[1] Скорость волн на воде зависит от глубины в данном месте, поэтому при переходе волн с глубокого места на мелкое надо считать, что волны перешли в другую среду.

Упр. 4. Щепка на воде за 10 с совершила 20 колебаний. Какова длина волны, если скорость волн 2,4 м/с? (О т в е т: 1,2 м).

§ 106. Некоторые общие свойства волн

1. Волны переносят определенную энергию. Ясно, что если раньше частица покоилась, а потом стала колебаться, то она получила энергию от дошедшей до нее волны. Если после этого частица продолжает колебаться, несмотря на то, что она передает свою энергию более далеким частицам, значит, она непрерывно получает энергию от "предыдущих" частиц.

2. Волны могут огибать препятствия. Это свойство волн называется дифракцией. Если на пути волн на воде поставить узкий забор, ширина которого сравнима с длиной волны, то волны сомкнутся очень близко за забором, так что этот забор не создаст никакой "тени". Если же ширина забора в сотни и тысячи раз больше длины волны, то непосредственно за забором волн не будет, и только далеко за ним волны сомкнутся снова. Таким образом, дифракцию волн легче наблюдать, если размеры препятствия того же порядка, что и длина волны.

3. При наложении двух волн каждая из них не мешает другой вызывать в данной среде такие же изменения, какие она вызывала бы в отсутствие другой волны. Это свойство называется суперпозицией волн. Суперпозиция означает, что если одна волна в отсутствие другой вызвала бы в данном месте смещение вверх на 3 см, а другая в отсутствие первой — смещение вниз на 2 см, то при наложении этих волн каждая из них действует независимо от другой, так что результирующее смещение будет $+3+(-2) = +1$ см.

Суперпозиция волн проявляется еще в том, что когда в одном месте пересекаются пути двух волн, то они не мешают друг другу потом двигаться восвояси (так, будто встречи не было). Например, свет — это волновое движение (колебания так называемого электромагнитного поля). Предположим, лучи двух прожекторов скрестились под прямым углом. Если свет был бы потоком обычных частиц, ширяться “назад”, он будет расширяться по всем остальным направлениям. При этом уплотнятся слои воздуха, прилегающие к первому слою, причем не только те, что находятся впереди, но и те, то находятся над ним, под ним и с боков. Затем эти слои начнут восстанавливать свой объем, уплотняя еще более далекие слои и т. д. Когда мембрана прогнется в обратную сторону, прилегающий к ней слой воздуха станет разреженным. Это разрежение, в свою очередь, будет передаваться от слоя к слою все дальше и дальше. Таким образом, каждый слой воздуха будет становиться то сжатым, то разреженным. В воздухе возникнут продольные волны. Когда они дойдут до барабанной перепонки, она начнет прогибаться то в одну, то в другую сторону с той же частотой, что и мембрана громкоговорителя, и у слушателя возникнет ощущение определенного звука.

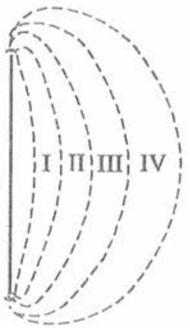


Рис. 130

Упр. 1. При качании качелей мы иногда слышим, как они “скрипят”, хотя частота качания качелей раз в десять меньше 20 Гц, а при такой частоте ощущения звука не должно возникать. Нет ли тут противоречия? (О т в е т. Противоречия нет. Отдельные части, к которым подвешены качели, при движении качелей начинают дрожать с частотами, во много раз большими, чем частота качания качелей. Эти звуки мы и слышим).

§ 108. Скорость звука

1. Скорость звука зависит от свойств той среды, в которой он распространяется. В воздухе при 0 °C звук распространяется со скоростью 331 м/с. От плотности воздуха скорость звука не зависит, она зависит от скорости движения его молекул. С повышением температуры скорость молекул растет, поэтому растет и скорость звука (приблизительно на 0,6 м/с при повышении температуры на 1 °C, так что при 15 °C она составляет 340 м/с). В других газах, а также в жидких и твердых телах скорость звука иная, чем в воздухе (например, в воде скорость звука 1450 м/с, в стали — 5000 м/с).

Упр. 1. Сколько километров в час должен делать самолет, чтобы лететь быстрее звука (при 0 °C)?

Упр. 2. Каково расстояние от охотника до горы, если эхо от выстрела пришло через 6 секунд (при 0 °C)?

Упр. 3. Какова длина звуковой волны в воздухе при 15 °C: а) при частоте 20 Гц; б) при частоте 20 000 Гц?

§ 109. Громкость, высота и тембр звука. Музыкальные звуки и шумы

1. От чего зависит громкость звука? Если ударить молоточком по камертону и выждать некоторое время, то амплитуда колебаний ветвей камертона постепенно будет уменьшаться. При этом уменьшается и громкость звука. Таким образом, громкость звука зависит от амплитуды колебаний: чем больше амплитуда, тем громче звук.

2. Музыкальные звуки могут различаться не только громкостью, но и высотой тона и тембром. Высота тона зависит от частоты колебаний: чем больше частота, тем выше тон звука. Особенно легко наблюдать это с помощью осциллографа. Можно убедиться в этом и более простым способом: с помощью стальной пластинки (например, полотна ножовки), зажатой в тиски. Если пластинка длинная, она колеблется медленно и никакого звука мы не слышим. Укорачивая ее колеблющуюся часть и тем самым увеличивая частоту колебаний, мы слышим звук сперва низкий, а затем более высокий.

Одну и ту же мелодию можно исполнить на рояле, на скрипке, на баяне и т. п. или же пропеть ее. Каждый раз мы легко узнаем характерное звучание данного инструмента или голоса. Значит, два звука с одинаковой высотой тона могут отличаться друг от друга какими-то оттенками. Принято говорить, что они отличаются своим тембром. Чем объяснить это различие? Наблюдая график колебаний камертона с помощью осциллографа, можно заметить, что то при скрещивании лучей частицы, сталкиваясь друг с другом, нарушили бы их дальнейшее движение. На самом же деле поток света, пересекаясь с другим потоком, дальше распространяется так, будто никакой встречи не было. Это относится и к механическим волнам. Если на бильярдном столе установить под прямым углом друг к другу две пересекающиеся цепочки шаров (рис. 128) и одновременно ударить по крайнему шару каждой цепочки (например, шаром), то одновременная передача двух движений тем шаром, который находится на пересечении цепочек, ничуть "не испортит" каждое из движений. Шары с противоположных концов цепочек отлетят так, как будто никакой встречи двух движений не было.

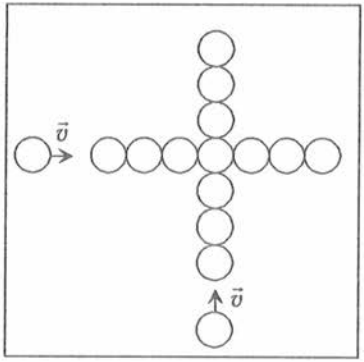


Рис. 128

§ 107. Звук

1. Наблюдения показывают, что звучащее тело всегда колеблется. Колебания звучащей струны заметны "на глаз". Колебания камертона[1] легко обнаружить, поднося к нему стальной шарик, подвешенный на нитке (рис. 129). Когда камертон звучит, то шарик, коснувшись камертона, с силой от него отбрасывается. Можно получить график колебаний камертона, прикрепив к нему иглу (не очень жесткую) и проведя ею по закопченной стеклянной пластинке. На пластинке появится линия, близкая к синусоиде. Отсюда видно, что колебания камертона близки к гармоническим. Особен-

---

[1] Камертон — источник звука, применяемый музыкантами при настройке инструментов и при хоровом пении. Состоит из стальной вилки, укрепленной на стержне (рис. 129). Если по одной из ветвей камертона ударить, он начнет звучать, причем данный камертон всегда издает звук определенного тона.

звук был достаточно громким, поскольку на границе между вают гидролокатором. Некоторые живые существа (летучие мыши, дельфины) подобным образом, т. е. с помощью ультразвуковой локации, способны ориентироваться в полной темноте и находить таким способом добычу.

Почему для целей локации используют не обычный звук, а ультразвук? Тут две причины. Первая заключается в том, что для получения направленного пучка волн размеры излучателя должны быть в несколько раз больше длины волны. Поэтому ультразвуковая аппаратура получается более компактной, чем звуковая (легко рассчитать, что частоте 3000 Гц соответствует в воде длина волны 0,5 м, а 30 000 Гц — 5 см). Вторая причина: чем меньше длина волны, тем более мелкие предметы (или детали этих предметов) может обнаружить локатор. Объясняется это тем, что хорошее, надежное отражение получается от предметов, размеры которых во много раз больше длины волны.

3. Ультразвуковые волны достаточной мощности оказывают на тела дробящее и измельчающее действие. Это используется для получения эмульсий, для обезжиривания поверхностей, для размельчения зерен фотоэмульсий и т. д. Ультразвуки ускоряют протекание некоторых химических реакций и процессы перемешивания различных смесей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Соловейчик Иосиф Абрамович

ФИЗИКА
МЕХАНИКА

Пособие для абитуриентов и старшеклассников

Заведующий редакцией *А.В. Барзилович*
Технический редактор *М.Г. Столярова*
Художник *С.И. Ващенок*
Изготовление оригинал-макета *Н.А. Платонова, А.И. Варваркин*
Корректор *Н.Н. Атаманенко*

Подписано в печать 08.08.2006. Формат 84 x 108 $^1/_{32}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,66. Тираж 300. Заказ № 3456

Издательство ТОО «Агентство ИГРЕК»
190068, Санкт-Петербург, пер. Бойцова, 4

Отпечатано с готовых пленок
в ГУП «Типография «Наука»
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12